இடைத்தர

நீர்நிலையியல்

பிறீடெல்

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

இடைத்தர நீர்நிலையியல்

2—R 19640—5,004 (12/66)

இடைத்தர

நீர்நிலையியல்

ஆக்கியவர்

இ. இ. பிறீடெல், M.Sc. A.R.C.S, D.I.D.

கணித விரிவுரையாளர், இம்பீரியல் கல்லூரி, லண்டன்

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினருக்காக
இலங்கை அரசாங்க அச்சகத்திற் பதிப்பிக்கப்பட்டது

முதற்பதிப்பு : 1969

INTERMEDIATE HYDROSTATICS

by

E. E. PREIDEL

Copyright by

UNIVERSITY TUTORIAL PRESS LTD., LONDON.

Translated and Published in Ceylon
by

THE EDUCATIONAL PUBLICATIONS DEPARTMENT

by arrangement with

UNIVERSITY TUTORIAL PRESS LTD., LONDON.

லண்டன் வரைவுற்ற பல்கலைக்கழக ரியூற்றேறியல் அச்சகத்தினரின் இசைவுடன் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினரால் வெளியிடப்பட்டது.

முன்னுரை

இந் நூல் **இ. இ. பிறீடெல்** என்பவரால் ஆங்கிலத்தில் எழுதப்பட்ட "**Intermediate Hydrostatics**" என்னும் நூலின் மொழிபெயர்ப்பாகும்.

இந்நூலில் நீர்நிலையியலின் அடிப்படைத் தத்துவங்களும், அவற்றின் பிரயோகங்களும் தெளிவாய் விளக்கப்பட்டுள்ளன. ஆங்கு தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்கள் சம்பந்தப்படும் தத்துவங்களின் விளக்கத்தைப் பெருக்கும்.

உயர் பள்ளிச் சான்றிதழ் வகுப்பிலும், பல்கலைக்கழக விஞ்ஞான எந்திரவியல் முதலாண்டு வகுப்புகளிலும் பயிலும் மாணவரின் தேவையை இந் நூல் பூர்த்திசெய்யுமென நம்பப்படுகிறது.

இந் நூல் சி. நடராசர் M. A., B. Sc. அவர்களால் மொழிபெயர்க்கப் பட்டது. அவர்க்கு இத் திணைக்களத்தின் நன்றி உரித்தாகும். இந் நூல் பற்றிய திருத்தங்கள் உவந்தேற்கப்படும்.

எம். ஏ. பெரேரா,
கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர்.

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்,
"சிறிமதிபாயா"
58, சேர் எணெஸ்ற் டி சில்வா மாவத்தை,
கொழும்பு 3.

පෙරවදන

ඊ. ඊ. ප්‍රිඩල් විසින් ඉංගිරිසියෙන් ලියන ලද "Intermediate Hydrostatics" නම් පොතේ පරිවර්තනයෙකි මේ.

ද්‍රවස්ථිති විද්‍යාවේ මූලික මූලධර්ම ද ඒවායේ යෙදුම් ද මේ පොතෙහි පැහැදිලි ලෙස විස්තර කර තිබෙයි. මෙහි ඇතුළත් කර ඇති විවිධ නිදසුන් ඇසුරෙන් ඒවායේ යෙදෙන මූලධර්ම පිළිබඳ අවබෝධයක් ලබාගැනීම පහසු කැරෙයි.

උසස් පාඨශාලා සහතික පත්‍ර පෙළ සිසුන්ට ද විශ්ව විද්‍යාලයේ විද්‍යා අංශයේත් ඉංජිනේරු විද්‍යා අංශයේ පළමුවැනි අවුරුද්දේත් සිසුන්ට ද මෙම පොත ප්‍රයෝජනවත් වේ යැයි අදහස් කරමු.

මෙහි පරිවර්තනය එස්. නඩරාසර්, එම්.ඒ., බී.එස්සී. මහතා විසින් කරන ලදී. දෙපාර්තමේන්තුවේ කෘතඥතාව ඒ මහතාට හිමි ය. පොත තවදුරටත් දියුණු කැරැලීම සඳහා ප්‍රයෝජනවත් යෝජනා සතුටින් පිළිගනිමු.

එම්. ඒ. පෙරේරා,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස්.

කොළඹ 3,
සර් අර්නස්ට් ද සිල්වා මාවතේ, අංක 58හි,
"සිරිමතිපායේ",
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුවේ දී ය.

நூன்முகம்

இந் நூல் இரண்டு குறிக்கோளைக் கருத்திற் கொண்டு பாடசாலைகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் பயிலும் விஞ்ஞான எந்திரவியல் மாணவர்க்காக எழுதப்பட்டது. முதலாவது குறிக்கோள், நீர்நிலையியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் எந்திரவியலின் பல்வேறு பிரிவுகளில் எவ்வாறு பிரயோகிக் கப்படுகின்றன என்பதைக் காட்டுவதாகும். மற்றையது, வெவ்வேறு உயர் பள்ளிச் சான்றிதழ் தேர்வுகளுக்கும், இடைத்தர பட்டத் தேர்வுகளுக்கும் உரிய நீர்நிலையியலின் தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்வதாகும்.

பல்வேறு நிறுவல்களுக்கு மாற்று முறைகள் பொதுவாய்த் தரப்பட்ட போதிலும் அங்கு தொடக்க நுண்கணிதம் உபயோகித்ததற்கு மன்னிப்புக் கோரவேண்டியதில்லை. சம்பந்தப்படும் தத்துவங்களைப் போதிய அளவு விளக்குதற்குப் பெருந் தொகையான உதாரணங்கள் உள்ளடக்கப்பட் டுள்ளன.

உயர் பள்ளிச் சான்றிதழ்த் தேர்விலும்; இடைத்தர கலை, விஞ்ஞானம், எந்திரவியல் தேர்வுகளிலும் வினவப்பெற்ற கேள்விகளை உபயோகிக்க அனுமதியளித்த லண்டன் பல்கலைக்கழகச் செனற் சபைக்கு என் நன்றி உரித்தாகும்.

இ. இ. பி.

யூன், 1948.

பொருளடக்கம்

இடைத்தர நீர்நிலையியல்

அதிகாரம் I

பாயியமுக்கம்

1. நீர்நிலையியல்

ஓய்விலிருக்கும் பாயிகளின் சமநிலைபற்றியும் இப்பாயிகளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் விசைகள்பற்றியுங் கூறுகின்ற பாடம் நீர்நிலையியல் எனப் படும். இது தன் பெயருக்கேற்பத் திரவங்களுக்கு எடுத்துக்காட்டாக விளங்கும் நீரைப்பற்றிக் கூறும் நிலையியலின் ஒரு கிளையாய் முன்னர் இருந்தது ; பின்னர் திரவங்கள் எல்லாவற்றையுந் தன்னுள் அடக்கு மாறு விரிக்கப்பட்டுள்ளது. இப் பாடம் ஆக்கிமிடிசின் (கி. மு. 250) ஆராய்ச்சியின் பயனாகத் தோன்றியதென நம்பப்படுகின்றது. ஆயினும், 1653 ஆம் ஆண்டிலேதான் பிரான்சிய தத்துவசாத்திரியுங் கணிதவறிஞரு மான பஸ்க்கால் என்பவராலே நீர்நிலையியற் கொள்கையின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் தெளிவாய் எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்கப்பட்டுள்ளன. இக்கோட்பாடுகள் பல வகையான செய்முறைப் பிரயோகங்களை உடையன. முதலாவதாக, இவற்றின் காரணமாகவே பம்பிகள் நீரியலமுத்திகள், சுழலிகள் போன்ற பல செய்முறைக் கருவிகள் தொழிற்படுகின்றன. இரண்டாவதாக, இவை விசைகளின் தாக்கத்திற்கு உட்பட்ட பாயிகளின் **இயக்கம்** பற்றியும், பாயிகளினூடாகத் திண்மங்களின் இயக்கம்பற்றியும், இதன் விளைவாகக் குளாய்களினூடே திரவங்களின் பாய்ச்சல், ஆகாய விமானச் சிறகுகளினுடைய வெட்டின் வடிவம், கப்பல்களின் வடிவம், உறுதிநிலை இவை போன்ற பல செய்முறைப் பிரச்சனைகளைப் பற்றியுங் கூறும் **நீரியக்கவியல்** என்னும் பாடத்திற்கு அடிப்படையாகும். இப் பாடத்திலே செய்முறை எந்திரிக்குத் தனிப்பட்ட முக்கியத்துவமுடைய பகுதிகள் **நீரியல்** எனப்படும். நீரியற் கோட்பாடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ள சில கருவிகளைப்பற்றிய விபரம் அதிகாரம் XI இற் கூறப்படும்.

பாயி, திரவம், திண்மம் போன்ற சொற்களால் நாம் எதனைக் கருது கிறோம் என்பது பற்றிய நுண்ணாராய்ச்சியுடன் நீர்நிலையியல் என்னும் இப் படிப்பைத் தொடங்குகின்றோம்.

2. சடப்பொருளின் மூன்று வடிவங்கள்

சடப்பொருள் அனைத்தையுந் **திண்மம், பாயி** என இரண்டு இனங்களாக வகுக் கலாம் பாயி என்பது, தன் பெயருக்கேற்பப் **பாய்கின்ற** பொருளாகும் ; அல்லது

பாயக்கூடிய ஒரு பொருளாகும். பாயிகளை (இவற்றுள் நீருங் காற்றுமே மிகச் சாதாரணமானவை) **திரவங்கள்** (உ—ம். நீர்), **வாயுக்கள்** (உ—ம். காற்று) என இரண்டு உட்பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். இம் மூன்று இனங்களுள் ஒவ்வொன்றினது சிறப்பியல்புகள் சிலவற்றைக கவனித்தல் பிரதான மாகும்.

ஒரு **திண்மமானது** கால வரையறையின்றித் தனது வடிவத்தைக் ஒரே அமைப்பில் வைத்திருக்கவே நாடும். அதன் விளைவாகத் தனது வடிவத் தையோ கனவளவையோ மாற்ற நாடுகின்ற யாதுமொரு விசைக்கு அது மிக்க எதிர்ப்பை அளிக்கும்.

ஒரு **திரவமானது,** தனது வடிவத்தை மாற்ற நாடுகின்ற ஒரு விசைக்கு மிகச் சிறிய எதிர்ப்பையும், தனது கனவளவை மாற்ற நாடுகின்ற ஒரு விசைக்கு மிக்க எதிர்ப்பையும் அளிக்கும் ஒரு பாயியாம். அதாவது, இது அமுக்க மாற்றத்தாலே தனது கனவளவில் மிக்க மாற்றத்தை அடையாதாயினுந் தான் அடங்கியுள்ள பாத்திரத்தின் வடிவத்தை உடனடி யாகக் கொள்ளும்.

ஒரு **வாயுவானது** எளிதாக நெருக்கப்படக்கூடிய பாயியாகும், அமுக்க மாற்றத்திற்குத் தகத் தனது கனவளவிலே மாற்றம் அடையும். ஒரு வாயுவின் ஓரளவை ஒரு மூடப்பட்ட பாத்திரத்திற்குட் செலுத்தினால், அது விரிந்து அப்பாத்திரத்தை நிரப்பும்; அதன் விளைவாக அவ்வாயு வுக்குச் சுயாதீனமான பரப்பு யாதும் இல்லை.

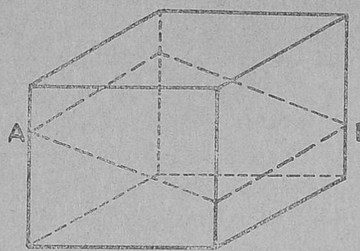
வகையறுக்கும் இச்சிறப்பியல்புகளைப் பின்வருமாறு இசைவாகச் சுருக்கிக் கூறலாம் :—

ஒரு **திண்மத்திற்குப்** பருமன், வடிவம் ஆகிய இரண்டும் உண்டு.
ஒரு **திரவத்திற்குப்** பருமன் உண்டு, ஆனால் வடிவம் இல்லை.
ஒரு **வாயுவிற்குப்** பருமனும் இல்லை, வடிவமும் இல்லை.

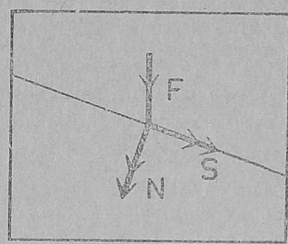
எல்லா இரசாயன மூலகங்களும் வேறு பல பொருள்களும் வெளி நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்றவாறு மூன்று வடிவங்களிலும் இருக்கக்கூடும். பனிக்கட்டி, நீர், கொதிநீராவி ஆகியவற்றை யாவரும் அறிவர். இவை வெப்பநிலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களினால் ஒரே பொருளிலிருந்து உண்டாகும் வேறுபட்ட வடிவங்களாகும். எனினும், மிக்க அண்மைக் காலத்திலேதான் (1878) பிரான்சிய பௌதிகவறிஞரான கெயிலெற்றே, பிறறே என்பவர் களால், காற்று, ஒட்சிசன், நைதரசன் ஆகியன திரவமாக்கப்பட்டன. இம் மூன்று வடிவங்களும் வேறுபட்டவையாய் இருப்பினும் ஒரு வடிவத் திலிருந்து மற்றொன்றுக்கு மாறும் மாற்றம் படிப்படியாகவே நிகழும். இம் மாற்றம் நிகழும்போது அப்பொருள் அடுத்துள்ள இரு நிலைகளினது சிறப் பியல்புகள் சிலவற்றை வெளிப்படுத்தலாம்.

3. திண்மங்களும் பாயிகளும்

இந்நூலில் எடுத்துக்கொண்ட பொருள் பாயியாதலால், திண்மங்கள், பாயிகள் என்னும் இவற்றின் முக்கிய வேறுபாடுகளைச் சிறிது ஆழ்ந்து ஆராய்வோம்.



படம் 1



படம் 2

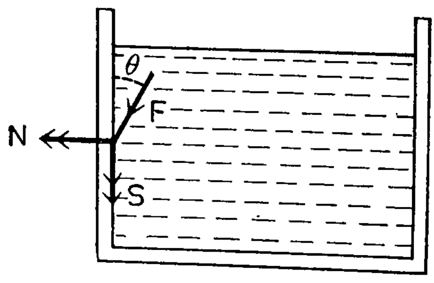
AB என்னும் ஒரு கற்பனைத் தளத்தால் மேற் பகுதி கீழ்ப் பகுதி களாகப் பிரிக்கப்பட்ட ஒரு திண்ம மரத்துண்டு எம்மிடம் உண்டு எனக் கொள்க (படம் 1). மேற்பகுதி தனது நிறை காரணமாக, கீழ்ப்பகுதியின் மீது கீழ்முக விசைகளை உஞற்றும். நிலையியல் முறைப்படி (*Tutorial Statics*, ப.*24* ஐப் பார்க்க.) இக்கீழ்முக விசைகளை, வெட்டு வரிப்படத்திற் (படம் 2) காட்டியதுபோல, தளவெட்டிற்குச் செங்கோணங்களில் உள்ள விசைகளாகவும் இத்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக உள்ள விசைகளாகவும் துணிக்கலாம். N என்னும் விசைகள் வெட்டிற்குச் செவ்வன் உதைப்பாக அமையும்; S என்னும் விசைகள் **கொய் விசைகள்** எனப்படும். வரிப் படத்திலே காட்டப்பட்டிருக்குந் திசைகள், அத்துண்டின் மேற் பகுதியானது கீழ்ப் பகுதியின்மீது உஞற்றும் விசைக் கூறுகளினுடைய திசைகளாகும்; அது காரணமாக, சமமான தாக்கவெதிர்த் தாக்கங்களைப் பற்றிக் கூறும் நியூற்றனின் மூன்றாவது விதிப்படி கீழ்ப் பகுதியானது மேற் பகுதியின் மீது சமனும் எதிருமான தாக்கங்களை உஞற்றும். இந்த இணைந்த விசைகள் யாவும் வெட்டிலுள்ள **தகைப்பு** எனப்படும். கொய் விசை களும், இவற்றைச் சமன்படுத்தும் விசைகளும் மாத்திரம் வெட்டிலுள்ள **கொய் தகைப்பாய்** அமையும். அத்திண்மத் துண்டு மேலே காட்டப்பட்ட கொய் தகைப்பைத் தாங்கக்கூடும் என்பது தெளிவு. இச்செயலுக்கு அத் திண்மத்தின் **விறைப்பே** காரணமாகும். அத்திண்மமானது தனது யாதாயினு மொரு வெட்டிற்குச் செங்குத்தான உதைப்பைத் தாங்குமாதலால், பின் வரும் வரைவிலக்கணம் பெறப்படுகின்றது. ஒரு **திண்மமானது** எவ் வகைத் தகைப்பிற்கும், அத்தகைப்பு மிகப் பெரிதாய் இல்லாதவிடத்து, நிலையான தடையை அளிக்கும் ஒரு பொருளாம்.

மிகப் பெரியதொரு தகைப்பைப் பிரயோகித்தால் அத்திண்மம் உடையலாம் என்பது வெளிப்படை. அது அளிக்கும் நிலையான தடையே அதனை ஒரு பாயியிலிருந்து வேறுபடுத்துகின்றது. இதற்குக் காரணம் ஒரு பாயியானது எத்துணைச் சிறிய யாதொரு கொய் தகைப்பையும் நிலையாகத் தாங்க ஆற்றலற்றது என்பதே. படம் 1 இலே மேற பகுதியைப் பாயி எனக் கொண்டால் சமநிலை நிகழாது என்பதும், அப்பாயி உருக்குலைந்து கீழ் நோக்கி ஓடும் என்பதும் அனுபவவாயிலாக வெளிப்படையாயுள்ளன ; பாயிக்கு விறைப்பு இல்லை. மேலே சொல்லப்பட்ட ஒரு பாயியின் வரைவிலக்கணத்திலே “ நிலையான ” என்ற அடைமொழிக்குக் காரணம் பின்வருமாறு :—சில பாயிகள் மந்தமானவை அல்லது பிசுக்கானவை ஆகையால், கொய் தகைப்பால் இயக்கம் விளைவிக்கப்படுவதற்கு முன நேரம் தேவைப்படும். ஆனால், ஒரு பாயி எத்தகைப் பிசுக்காய் இருந்த போதிலும் ஒரு கொய் தகைப்பானது, சிறிதாயிருப்பினும, ஈற்றில் இயக்கம் விளைவிக்கும். ஆகவே, ஒரு கொய் தகைப்புககு உட்பட்ட ஒரு பாயிக்குச் சமநிலை இருததல் இயலாது. மற்று, குறைந்த பிசுபிசுப்புடைய ஒரு பாயி அத்தகைய ஒரு தகைப்புக்கு உட்படின் விரைவாகப் பாயும். ஓய்விலிருக்கும் பாயிகளை பற்றியே நாம் கூறுவோமாதலால், பாகு நிலையைப்பற்றி அக்கறை கொள்ள வேண்டியதில்லை ; சமநிலையிலிருககும் எப்பாயியிலும் கொய் தகைப்பு இருத்தல் முடியாது என்பதையே நாம் தெளிவாக உணரவேண்டும்.

4. ஒரு பாயியின் அடிப்படை இயல்பு

ஒரு பாயிக்கு விறைப்பு இல்லாத காரணத்தால், பாயியின் பின்வரும் அடிப்படை இயல்பை நாம் உய்த்தறியலாம் : **ஒரு பாயி சமநிலையிலிருக்கும்போது, அது தொடுகின்ற எப்பரப்பின் மீதும் உஞற்றுகின்ற விசையானது அப்பரப்பிற்குச் செங்கோணத்தில் இருக்கும்.**

ஒரு பாயியைக் கொண்ட ஒரு பாத்திரத்தினது வெட்டைப் படம் 3 குறிப்பதாகுக. அப்பாத்திரத்தினது பக்கத்திலுள்ள ஒரு சிறு பரப்பின் மீது அப்பாயி உஞற்றும் விசையை F குறிக்குமெனக் கொள்க. இங்கே எமக்கு இவ்விசையின் திசைபற்றியே அக்கறை உண்டு ; ஆனால் இதன் பருமன்பற்றி அக்கறை இல்லை. F இனது திசை நிலைக்குத்தோடு θ கோணத்தை ஆக்குக. ஆயின், F என்பது செங்கோணங்களிலுள்ள N, S என்னும் இரு கூறுகளாகத் துணிக்கப்படலாம் ; ஆகவே,



படம் 3

$S = F$ கோசைθ,

$N = F$ சைன்θ. (*Tutorial Statics*, ப. 24 ஐப் பார்க்க)

ஆனுல், S என்னும் விசையானது அப்பாயியின் துணிக்கைகளை அப் பாத்திரத்தின் சுவர்களிலே கீழ்நோக்கி வழுக்கச் செய்யும் ஒரு கொய் விசையாகும். ஆகவே, இயக்கம் விளையும். இது அப்பாயியானது சம நிலையிலே இருக்கின்றது என்னும் எங்கள் ஆரம்பக் கூற்றுக்கு எதிரிடை. எனின், சமநிலையில் இருப்பதற்கு S பூசசியத்திற்குச் சமமாதல் வேண்டும். ஆகவே,

$$\text{F கோசை } \theta = 0$$

எனவே, F$=0$ அல்லது கோசை $\theta=0$.

F பூச்சியத்திற்குச் சமனுயிருக்காதென்று நாம் அனுபவவாயிலாக அறிவோம், இதற்குக் காரணம் அப்பாத்திரத்தினது பக்கத்திலே ஒரு பகுதியை நீக்கிவிட்டால் அப்பாயி வெளியே ஓடிவிடுமென்பதே. ஆகவே, யாதாயினுமொரு விசை நிச்சயமாக உண்டு. எனவே,கோசை $\theta=0$, அதாவது $\theta = 90°$; ஆகவே, F என்னும் விசை அப்பரப்பிற்கு முற்றிலுஞ் செங்குத்தாயிருக்கும்.

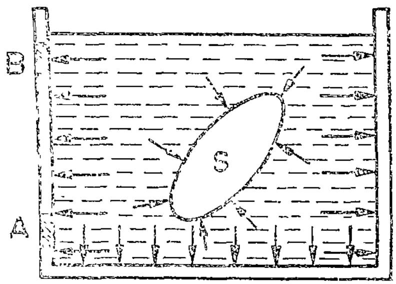
5. பூரணமான பாயி

ஒரு பாயியானது ஓய்விலோ இயக்கத்திலோ இருப்பினும், அதனேடு தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் ஒரு பரப்பின்மீது அதனுல் உஞற்றப்படும் விசை அப்பரப்பிறகுச் செங்கோணங்களிலே இருக்குமெனக் கறபனை செய்வது பெரும்பாலும் இசைவாயிருக்கும். இத்தகைக் கற்பனைப் பாயி **பூரணமான பாயி** எனப்படும். இவ்வரைவிலக்கணங் காரணமாக அப்பாயிக்கும் அதனைத் தொடும் எப் பரப்புக்கும் இடையே உராய்வியலபுடைய விசை இருத்தல் முடியாது. ஒரு பூரணமான பாயி பற்றிய இக்கருத்து நீரியக் கவியலிற் கூடிய முக்கியத்துவமுடையதாக இருககும். நாம் அறிந்து கொண்டதுபோல, ஒரு பாயியானது கூடிய பாகுநிலையிலோ குறைநத நிலையிலோ இருப்பினும், தான் தொடும் யாதுமொரு பரப்பிற்குச் செங கோணஙகளில் ஒரு விசையை என்றும் உஞற்றுமாகையால், இக்கருத்துப் பற்றி நீர்நிலையியலில் எமக்கு அவ்வளவு அக்கறையில்லை. எனினும், அத்தகை எண்ணக்கருவைக் குறிப்பாக நோக்குதல் பயன்தரும். இயற கையிலே இல்லாத ஒரு கற்பனைப் பாயியை ஒரு பூரணமான பாயியாக, முக்கியமாகச் செய்முறை விதிகளின் சூத்திரிப்புக்குத் துணையாகக் கொள் வது முதன் நோக்கிலே தருக்க ஒழுங்கற்றதாகத் தோன்றலாம். ஆனுல், அத்தகைப் பாயியின் பாய்ச்சலை முறை செய்யும் அறிமுறை விதிகளை எளிதாக நிறுவலாம். பின்பு, ஒரு பூரணமான பாயியின் பிறழ்ச்சியைப் பொருளாகக் கொள்வதற்கு அவ்விதிகளைச் சிறிது மாற்றி அமைக்கலாம்.

6. ஒரு பாயியின் அமுக்கம்

ஒரு பாயியினுல் உஞற்றப்படும் உதைப்புப்பற்றி அல்லது தள்ளல் பற்றி ஒரு பரிசோதனைமுறைச் சான்றை எடுத்து நோக்குவோம்.

ஒரு செவ்வகப் பாத்திரத்திலே அடங்கியுள்ள ஒரு பாயியின் வெட்டைப் படம் 4 குறிக்கின்றதெனக் கொள்க. அப்பாததிரததிலே A யில் இருக்கும் ஒரு துவாரமும B யில் இருக்கும் ஒரு துவாரமும் **ஒரே பரப்பளவுடையனவாயின்,** அப்பாயியானது B யில இருக்குந் துவாரத்தால் வெளியே கொப்புளிக்கும் விசையிலும் A யில் இருக்குந் துவாரத்தால் வெளியே பெரிதான விசையோடு கொப்புளிக்குமெனை நாம் அனுபவவாயிலாக அறிவோம். அப்பாயி A யில் உள்ள பரப்பளவின் மீது உஞற்றும் உதைப்பானது B யில் உள்ள பரப்பளவின்மீது உஞற்றுவதிலும் பெரிதாகுமென இது காட்டுகின்றது. இவ்வாராய்ச்சியில பரப்பளவு ஒரு முக்கிய காரணியாகையால் **அலகுப் பரப்பிற்குரிய உதைப்பை, அமுக்கம்** என்னுஞ் சொல்லாலே நாம் குறிப்போம். இவ்வுதைப்பு இச்சிறு பரப்பின் எலலாப் பகுதிகளிலும் ஒரே பெறுமானம் உடைத்தாயின் இவ்வமுக்கம் சீரானது எனப்படும். இவ்வாராய்சசியிலே உள்ள அமுக்கம் சீரானதன்று. நாம் மேலே (§16) அறியக்கிடப்பதுபோல, இவ்வமுக்கம ஆழத்தின் அளவுக்குத்தக சீராகக் கூடுதலுறும். அப்பாத்திரத்தின் பக்கங்களில் a சதுர அடியுள்ள ஒரு சிறு பரப்பளவை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பரப்பளவின மீதுள்ள மொத்த அமுக்கம் N இரு. நிறை எனக் கொள்க. ஆகவே, இப்பரபபளவின் மீதுள்ள **சராசரி அமுக்கஞ்** சதுர அடிக்கு $\frac{N}{a}$ இரு. நிறை ஆகும். பரப்பளவு a குறைககப்படுகின்றதாக எடுத்துக்கொள்வோமாயின இதன் விளைவாக மொத்த அமுக்கம் N உம் குறைக்கபபடும். a பூச்சியத்திற்கு ஒடுக்கப்படுமிடத்து $\frac{N}{a}$ என்பதன் எல்லைப் பெறுமானம் அப்பரப்பளவு ஒடுககப்படும் புள்ளியிலுளள **அமுக்கச் செறிவு** எனப்படும். அது இன்னும் சதுர அடிக்கு இத்தனை இரு. நிறை என்னும் அலகுகளிலேயே இருக்கும். அப்பாயி அப்பாத்திரம் என்னும் இவற்றின் பொது எல்லை முழுவதிலும் ஓரமுக்கச் செறிவு உண்டென்பது வெளிப்படை; ஆனால், அப்பாயிக்குள்ளே கிடக்கும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஓரமுக்கச் செறிவும உண்டென்பது அவ்வளவு வெளிப்படையன்று. இது பினவருமாறு காட்டப்படலாம். அப்பாயியின S கனவளவை உட்புறமிருந்து நீக்கிவிட்டால் யாது நிகழும என்பதைக் கற்பனை செய்துகொள்க (படம். 4). அக்கனவளவைச் சூழ்ந்துள்ள பாயி, வேகமாகப் பாய்ந்து அக்குழியை நிரப்பும. ஆகவே, S இல் அடங்கியுள்ள பாயி தன்னைச் சூழ்நதுள்ள பாயியின்மீது ஒரெதிர் உதைப்பை உஞற்ற வேண்டும்.



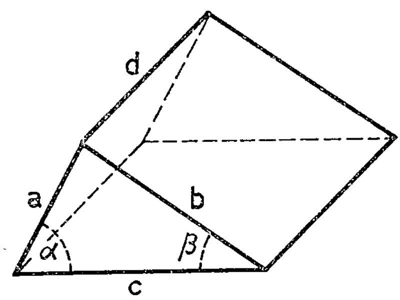
படம் 4

ஆகவே, S என்னுங் கனவளவின எல்லையிலுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும அமுக்கச் செறிவுகள உண்டு. S எவ்விடத்திலாவது இருக்கலாம் என்பதால், அப்பாயியின் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் ஓரமுக்கச் செறிவு உண்டு.

அப்பாயியானது பாத்திரத்தோடு தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் புள்ளிகளிலுள்ள உதைப்பினது திசையை நாம் அறிவோம். ஆகவே, அப்பாயியின் உட்புறத்திலிருக்கும் புள்ளிகளிலுள்ள அமுக்கச் செறிவின் இயல்பையே நாம் இப்பொழுது ஆராயவேண்டும்.

7. ஓய்விலிருக்கும் ஒரு பாயியின் யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள அமுக்கச் செறிவு எல்லாத் திசைகளிலும் சமமாகும்

ஒரு பாயியினுள்ளே பக்கங்கள a, b,c அங்குலமான முக்கோண வெட்டும், d அங்குல நீளமும கொள்ளுமாறு வரையப்படுங் கற்பனை அரியமொன்றை எடுத்து நோக்குக (படம் 5). இவ்வரியத்தின் மூன்று செவ்வக முகங்கள மீதும் இதன் இரு முக்கோண முனைகள் மீதும் இவ்வரியத்தின் வெளிப்புறத்தேயுள்ள பாயியின அமுக்கம் இவ்வரியத்திலுள்ள பாயியினது நிறையுடன் சேர்ந்து இவ்வரியத்தால அடக்கப்பட்ட பாயியைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கின்றன. இவ்வரியத்தின் ஒவ்வொரு முகத்தின் மீதுமுள்ள அமுக்கமானது ஓர் ஒன்றியான

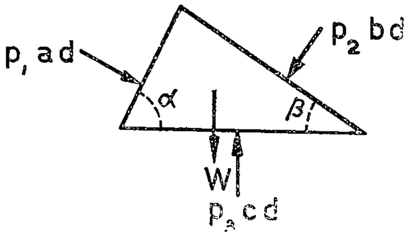


படம் 5

விசைக்குச் சமனாகுமெனக் கொள்ளலாம். இவ்வரியத்தினது அடி ஒரு கிடைத்தளத்திலே இருக்கின்றதெனக் கொள்க. ஆயின், இவ் விசைகளை இவ்வரியத்தினுடைய அச்சின் வழியே கிடையாகப் பிரிக்க, அவ் விரு முனைகள் மீதுமுள்ள விசைகள் சமமும் எதிருமாகும் என்பது பெறப்படும். எஞ்சிய விசைகளை இவ்வரியத்தின அச்சிற்குச செங்கோணங்களிலுள்ள ஒரு தளத்திற் துணித்தால, அச்செவ்வக முகங்கள் மீதுள்ள சராசரி அமுக்கங்கள் பற்றி அரிய செய்திகளைப் பெறுவோம. p_1, p_2, p_3, எனபன இச்செவ்வகமுகங்கள் மீதுள்ள சராசரி அமுக்கங்களைச் சதுர அங்குலத்திற்கு இத்தனை இரு. நிறை என்னும் அலகுகளிலே குறிப்பனவாகுக. அப்பாயியின் நிறை கனஅங்குலத்திற்கு w இரு. நிறை ஆகுக. ஆகவே, பக்கங்கள் a,d அங்குலங்களான முகத்தின் பரப்பளவு ad சதுர அங்குலமாய் இருத்தலால், இம்முகத்தின்மீது அவ்வரியத்தின் வெளியேயுள்ள பாயியால் உஞற்றப்படும் விசை p_1ad இரு. நிறையாகும். அது

போல, மற்றை முகங்கள் மீதுள்ள மொத்த விசைகள் p_2bd, p_3cd என்பன வாகும். அவ்வரியத்திலுள்ள பாயியினது நிறை (W ஆனது) $\frac{1}{2}c.\ a$ சைன் $\alpha.d.w$ ஆகும். இந்த விசைகள் வெட்டு வரிப்படத்திலே (படம் 6) காட்டப்பட்டுள்ளன. இவ்விசைகளைக் கிடையாகத் துணிக்க,

$$p_1ad \text{ சைன}\alpha = p_2bd \text{ சைன்}\beta \quad \text{(i)}$$



படம் 6

இனி, நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$p_1ad \text{ கோசை}\alpha + p_2bd\text{கோசை}\beta + W = p_3cd \quad \text{(ii)}$$

முக்கோணியின் கேத்திரகணித இயல்பால் (படம் 6), செங்குத்துத் தூரம் $= a$ சைன் $\alpha = b$ சைன் β, பக்கம் $c = a$ கோசை $\alpha + b$ கோசைβ, எனபன. முதற்றெருடாபைச் சமன் பாடு (i) இற் பயன்படுத்த, $p_1 = p_2$ எனப் பெறுவோம். ஆகவே, (ii) என்னுஞ் சமன்பாடு

$$p_1d(a \text{ கோசை}\alpha + b\text{கோசை}\beta) + W = p_3cd \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad p_1dc + \tfrac{1}{2}\, acdw \text{ சைன்}\alpha = p_3cd,$$

$$\therefore \quad p_1 + \tfrac{1}{2}aw \text{ சைன்}\alpha = p_3.$$

அப்பாயியின் ஒரு புள்ளியிலுள்ள அமுக்கம் பற்றியே நாம் அக்கறை கொண்டுள்ளோம. ஆகையால், அவ்வரியங் குறுகிக் குறுகி வரும்போது, எல்லையுறும் வகையில என்ன நேரிடும் என்பதை ஆராய்வோம். α,β எனபவற்றை நிலையாக வைத்துக்கொண்டு அவ்வரியம் ஒரு நேர்கோட்டுக்குச் சுருஙகுமாயின் a பூச்சியத்தை நாட, $\frac{1}{2}\, aw$ சைன்α என்பதும் பூச்சியத் தையே நாடவேண்டும். இதன விளைவாக எமது கடைசித்தொடர்பு எல்லையுறும் வகையில் $p_1 = p_3$ ஆகும. அனறியும, அம்முக்கோணி ஒரு புளளிக்கு ஒடுங்கும்போது p_1, p_2, p_3 என்னுஞ் சராசரி அமுக்கங்கள, எல்லையுறும் வகையில, இபபுள்ளிகளிலுள்ள அமுக்கச் செறிவுகளாகும். ஆகவே, $p_1 = p_2 = p_3$ என்பதுவே எம் இறுதியான முடிபாகும். α,β எனபன எப்பெறுமானஙகளையும் உடையனவாயிருக்கலாம் என்பதனுல், ஓய்விலிருககும் ஒரு பாயியிக்குள்ளே அமுக்கச் செறிவு எல்லாத் திசை களிலுஞ் சமமாகும் என்பது உய்த்தறியப்படும்.

8. அலகுகள்

அமுக்கம் என்பது அலகுப் பரப்பளவுக்குரிய உதைப்பு அல்லது விசை என்று முன்னர் வரைவிலக்கணங் கூறினேம். நாம் ஆரய்ந்த வகைகளில் 1 இரு. நிறையை விசையலகாக எடுத்தோம். சதுர அஙகுலத்திற்கு அலலது சதுர அடிக்கு இத்தனை இருத்தலிகள், அல்லது சதுரச் சதம

மீற்றருக்கு இத்தனை தைன்கள என்னும் அலகுகளிலும் அமுக்கத்தை நாம் கூறியிருக்கலாம். இதனைச் சில உதாரணங்கள் மூலந் தெளிவாக்குவோம்.

உதாரணம் 1. 4 அடி × 2 அடி ஆகத் தன் அடியைக்கொண்ட ஒரு செவ்வகத் தொட்டியில் ஒரு தொன் நீர் அடங்கியுள்ளதாயின் அவ்வடியின் மீதுள்ள மொத்த உதைப்பு

= 1 தொன் நிறை,
= 2240 இரு. நிறை.

இதனைப் பகிர்ந்துகொண்டிருக்கும் பரப்பளவு = 8 ச.அடி,

தொட்டியினடியின் மீதுள்ள அமுக்கச் செறிவு = $\frac{2240}{8}$

= ச.அடிக்கு 280 இரு. நிறை.

= $\frac{280}{144}$ = ச.அங். இற்கு 1·94 இரு. நிறை.

உதாரணம் 2. ஒரு கொதிகலத்திலுள்ள கொதிநீராவியின் அமுக்கஞ் சதுர அங்குலத்திற்கு 140 இரு. நிறையாயின், அக்கொதிகலத்தினுடைய 6 அடி விட்டமுள்ள வட்டமான முனைகளினுலே தாங்கப்படும் உதைப்பைக் காணல்.

இங்கே, யாதுமொரு முனையின் பரப்பளவு = $\frac{22}{7} \times (\frac{6}{2})^2$ ச.அடி

= $\frac{198}{7}$ ச. அடி

= $\frac{28512}{7}$ ச. அங்.

அமுக்கச் செறிவு=ச.அங்குலத்திற்கு 140 இரு. நிறை ;

யாதுமொரு முனை மீதுள்ள உதைப்பு = $\frac{28512}{7} \times 140$

= 28512×20

= 570240 இரு. நிறை.

= $254\frac{4}{7}$ தொன் நிறை.

உதாரணம் 3. சதுர அங்குலத்திற்கு 15 இரு. நிறையுடைய ஓரமுக்கச் செறிவை (i) சதுர அடிக்கு இத்தனை தொன்னிறை என்றும், (ii) சதுர அடிக்கு இத்தனை இருத்தலிகள் என்றுங் கூறல்.

(i) அவ்வமுக்கம் 1 சதுர அங்குலத்தின்மீது 15 இரு. நிறையான ஒருதைப்பை விளைவிக்கின்றது.

ஆகையால், அவ்வமுக்கம் 1 ச. அடி (=144 ச.அங்.) மீது 15×144 இரு. நிறையுள்ள ஒருதைப்பை விளைவிக்கின்றது.

∴ அமுக்கச் செறிவு = ச. அடிக்கு 15×144 இரு. நிறை.

= ச. அடிக்கு $\frac{15 \times 144}{2240}$ தொன்னிறை.

= ச.அடிக்கு ஒரு தொன்னின் $\frac{27}{28}$ பங்கு.

(ii) புவியீர்ப்பின் ஆர்முடுகல் செக்கனிறகுச் செக்கன 32 அடியாகும் எனறு கொள்ள,

1 இரு. நிறை = 32 இருத்தலி ;

∴ அமுககச் செறிவு = சதுர அடிக்கு $15 \times 144 \times 32$ இருத்தலி.

= சதுர அடிககு 69120 இருத்தலி.

உதாரணம் 4. சதுர அடிக்கு 1000 அவுன்சு நிறையுடைய ஓரமுக்கச் செறிவைச் சதுர அங்குலததிறகு இத்தனை இருத்தல் நிறையென்று கூறல்.

1 ச. அடி (=144 ச. அங்.) மீது அவ்வமுக்கம் உஞற்றும் விசை

= 1,000 அவுன்சு நிறை.

ஆகையால், 1 ச. அஙகுலததினமீது அவ்வமுக்கம் உஞற்றும் விசை

$$= \frac{1000}{144} \text{ அவுனசு நிறை.}$$

$$= \frac{1000}{144 \times 16} \text{ இரு. நிறை.}$$

$$\therefore \text{ அமுக்கச செறிவு } = \frac{1000}{144 \times 16} = \text{ ச. அங்குலத்திற்கு } 0{\cdot}434028 \text{ இரு.}$$

நிறை.

உதாரணம் 5. சதுர மிற்றருக்கு 1 கிலோ கிராம் நிறையுள்ள ஓரமுக்கம் (i) சதுரச் சதம மிற்றருக்கு கிராம் நிறையிலும், (ii) ச. கி. செ. இயககவியல் அலகுகளில் என்னவாகும் என்று கூறல்.

அவ்வமுக்கம் 1 ச. மீற்றா (= 100^2 ச. சமீ.) மீது உஞற்றும் விசை

= 1 கிலோ கிராம்

= 1000 கி. நிறை.

ஆகையால், அவ்வமுக்கம் 1 ச. சமீ. இலே உஞற்றும் விசை

$$= \frac{1000}{100^2} \text{ கி. நிறை.}$$

$$= 0{\cdot}1 \text{ கி. நிறை.}$$

எனின், அமுக்கச் செறிவு = ச. சமீ. இற்கு 0·1 கி. நிறை.

ச. கி. செ. இயக்கவியல் அமுக்கவலகு, சதுரச் சதம மீற்றருக்கு ஒரு தைனின் அமுக்கம ஆகும்.

இனி, புவியீாப்பின் ஆர்முடுகல = செக்கனுக்குச் செக்கன் 981 சமீ.

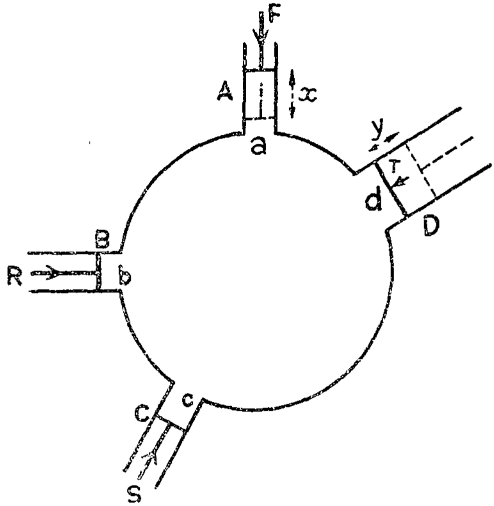
∴ ஒரு கிராமினது நிறை = 981 தைன் ;

தநத அமுக்கச் செறிவு = $981 \times 0{\cdot}1$

= ச. சமீ. இற்கு 98·1 தைன்.

9. பாயி அமுக்கத்தினது ஊடுகடத்தப்படுதன்மை

ஒரு பாயியினது பரப்பின் யாதுமொரு பகுதிக்கு யாதுமோர் அமுக்கம் பிரயோகிக்கப்பட்டால், ஒருசீரான சம அமுக்கமொன்று அப்பாயி முழுவதி லுஞ் செலுததப்படும்.



படம் 7

இக்கோட்பாடு பஸ்க்காலின் விதி என்றுஞ் சொலலப்படும். இதனைப் பின்வருமாறு பரிசோதனைமுறையாலே சரி பாரக்கலாம். விசைகள பிரயோகிக்கப்படத்தக்க முசலங்களை கொண்ட பல குளாய்கள் பொருததப் பட்ட ஒரு மூடிய பாத்திரத்திலே ஒரு பாயி அடங்கியுள்ளதெனக கொள்க (படம் 7). சமநிலையான ஒரு நிலைகுத் தேவைப்படும விசைகள் F, R, S, T இரு. நிறைகள் எனக் கொள்க. வரிப்படத்திலே குறிப்பிட்டிருப்பது போல, அக்குளாய்களின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பளவுகள a, b, c, d ச. அங். ஆகுமென்றுங கொள்க.

A முசலத்திற்கு ஒரு மேலதிகமான விசை (சதுர அங்குலத்திற்கு $\dot{p}$ இரு. நிறை), அதாவது pa இரு. நிறை, பிரயோகிக்கப்படுகின்றது என்று கொள்க. அப்போது, சமநிலையைப் பேணுதற்கு R, S, T என்பனவறறிற்கு முறையே pb, pc, pd இரு. நிறையுள்ள மேலதி கமான விசைகள் பிரயோகித்தல் அவசியமானதெனபது காணப்படும் ; இவற்றின் மீதுள்ள அமுக்கஞ ச. அஙகுலத்திற்கு p இரு. நிறையாலே கூட்டப்பட்டுள்ளதென இது காட்டுகின்றது. வேறு விதமாகக் கூறுமிடத்து,

A யிற் பிரயோகிக்கப்பட்ட p என்னும் மேலதிகமான விசையானது அப் பாயிகளூடாக மற்றைய முசலங்களுக்குத் தன்னையே ஊடுகடத்திவிட்டது எனலாம்.

இப்பரிசோதனை ஏற்பாடு செய்தற்குக் கடினமானதாகும்; இக்கோட் பாட்டைச் சக்திக் காப்பாலே நிறுவலாம். முழுக் கனவளவும் மாறுமல் இருக்குமாறு A முசலம் F இரு. நிறையுள்ள ஒரு விசையால் x அங். தூரம் உள்ளே தள்ளப்பட, இதன் விளைவாக D முசலம் T இரு. நிறையான விசைக்கு எதிராக y அங். தூரம் வெளியே அரக்கப்பட் டதென்றும், அச்சமயத்தில் B, C என்னும் முசலங்கள் ஒரே நிலையில் இருந்தனவென்றுங் கொள்க. ஒரு பாயியானது தனது கனவளவை மாற்றுத வடிவ மாற்றங்களுக்குத் தடை யாதும் அளிக்காதாகையால் A, D என்னும் முசலங்களை அரக்குவதால் வேலை யாதுஞ் செய்யப் படுவதில்லை. ஆகையால், F செய்யும் வேலை T யிற்கு எதிராகச் செய் யப்படும் வேலைக்குச் சமனுகும்.

அதாவது, $$Fx = Ty \quad \text{(i)}$$

அன்றியும், கனவளவில் ஒரு மாற்றமும் ஏற்படாத காரணத்தால்

$$ax = dy \quad \text{(ii)}$$

(i) ஐ (ii) ஆற் பிரிக்க,

$$\frac{F}{a} = \frac{T}{d}.$$

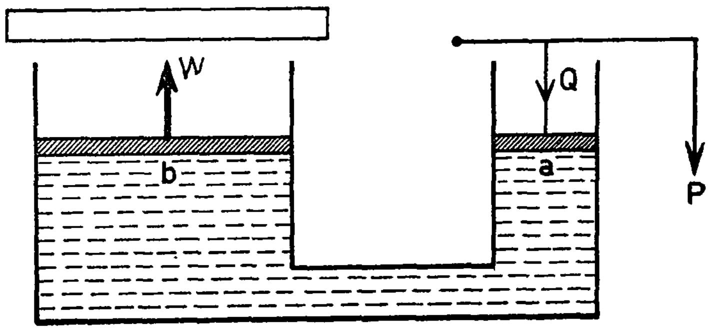
ஆனுல், $\frac{F}{a}$ என்பது (ச. அங். இற்கு இரு. நிறையில்) முசலம் A மீதுள்ள அமுக்கம் ஆகும்; $\frac{T}{d}$ என்பது முசலம் D மீதுள்ள அமுக் கமாகும். ஆகவே, இம்முசலங்களின் மீதுள்ள அமுக்கங்கள் சம மாகும். இதுபோல, மற்றைய முசலங்களின் மீதுள்ள அமுக்கங்களுஞ் சமமாகுமென நிறுவலாம்.

10. பிரமாவமுத்தி அல்லது நீரியலமுத்தி

இது, முந்திய பிரிவிலே ஆராய்ந்த பாயி அமுக்கத்தினது ஊடுகடத் தப்படுதன்மைக் கோட்பாட்டின் ஒரு செய்முறைப் பிரயோகமாகும்.

முக்கியமாக, ஒரு நீரியலமுத்தியானது அகன்ற நிலைக்குத்தான உருளை யொன்று, அதன் அடிக்கு அண்மையிலிருந்து, ஒரு குழாயால் ஒடுக்கமான நிலைக்குத்துருளையொன்றேடு தொடுக்கப்பட்டதனுல் ஆயது (படம் 8). உருளை ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு முசலம் பொருத்தப்பட்டு, அம்முசலங் களுக்குக் கீழேயுள்ள வெளி நீராலே நிரப்பப்பட்டுள்ளது. ஒடுக்கமான முசலம் (பம்பி – அமுங்கி) கீழ்முகமாக ஓட்டப்படும். அப்போது, பெரிய முசலம் (நெருங்கி–அமுங்கி, அல்லது மொங்கான்) தனக்குந்

தனக்கு மேலே பொருத்தப்பட்ட ஒரு நிலையான இடை மேடைக்கும் இடையேயுள்ள ஒரு பொருளை நெருக்கக்கூடியவாறு ஒரு மேன்முக இயக்கத்தைப் பெறும். முதன் நோக்கில் வியப்பாகத் தெரியக்கூடியது என்னவெனின், பம்பி–அமுங்கிமீதுள்ள சிறு விசையொன்று நெருக்கி–அமுங்கி அல்லது மொங்கான் மீது பெரிய விசையொன்றைப் பிறப்பிக்கும்



படம் 8

என்பதே. வரிப்படத்திலே காட்டியுள்ளது போல, அம்முசலங்களின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவுகள் a, b ச. அங். ஆகுமென்று கொள்க. இங்கு, b யானது a யிலும் பெரிதாகுக. ஆயின், அப்பம்பி–அமுங்கியின் மீதுள்ள Q இரு. நிறையான ஒரு கீழ்முக விசை ச. அங்குலத்திற்கு $\frac{Q}{a}$ இரு. நிறையான ஓரமுக்கத்தைத் தரும். இவ்வமுக்கம் 9 ஆம் பிரிவின்படி, அத்திரவத்தினூடாக பெரிய முசலத்திற்குச் செலுத்தப்படும். இம்முசலம் உஞற்றும் நெருக்கு விசை W இரு. நிறையாயின், இதன் மீதுள்ள அமுக்கம் $\frac{W}{b}$ இரு. நிறையாகும்; இவ்வமுக்கம் மொங்கானின் அமுக்கத்திஞலே உண்டாகி ஓதற்குச் சமஞகவேண்டும்.

எனவே,
$$\frac{Q}{a}=\frac{W}{b};$$

ஆகவே,
$$W=\frac{b}{a}Q.$$

$b > a$ ஆதலால், $W > Q$ ஆகும். W என்னும் நெருக்கு விசை Q என்னும் பிரயோக விசையிலும் பார்க்க அவற்றின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவுகளின் விகிதத்தாற் பெரிதாகும். உதாரணமாக, பெரிய முசலத்தின் குறுக்கு வெட்டானது சிறிய முசலத்தினுடைய குறுக்கு வெட்டின் நான்கு மடங்காயின்,

$b = 4a$ அல்லது $\frac{b}{a} = 4$ ஆகி $W = 4Q$ ஆகும ; அதாவது நெருக்கு விசை பிரயோக விசையின் நான்கு மடங்காகும். செய்முறையில், படத்திற் காட்டியதுபோல் Q விசையை ஒரு நெம்புமூலம் பிரயோகித்தல் இசைவாகும். அறிமுறையில், இரு முசலங்களின் விகிதத்தையும் ஒழுங்கு படுத்துதலால் யாதும் பருமன் கொண்ட ஒரு நிறையை ஒரு சிறு விசை தாங்குமாறு செய்யலாம். இது " நீர் நிலையியல் முரணுரை " எனக் கூறப்பட்டுள்ளது ; ஆனல் முரணுரையாக யாதுமில்லை ; ஏனெனின் இதே உண்மை ஒரு நெம்புக்கும் வேறு ஒவ்வோர் எளிய பொறிக்கும் பிரயோகிக்கப்படும்.

சில எண்ணுதாரணஙகள் இப்போது தரப்படும்.

உதாரணம் 1. விட்டங்கள் முறையே 1 அங்குலமும் 2 அடியுமாகும் வட்ட முசலங்களைக் கொண்ட பிரமாவமுத்தியில் 9 தொன் நிறையுடைய ஒரு தடையை வெல்தற்கு வேண்டிய விசையைக் காணல்.

இங்கு வட்ட முசலங்களின் பரப்பளவுகள் முறையே $\frac{1}{4}\pi \times 1^2$, $\frac{1}{4}\pi \times 24^2$ சதுர அங்குலமாகும். பெரிய முசலத்தில் பாயியின் உதைப்பு 9×2240 இருத்தல் நிறையாக வேண்டும். ஆகவே, பாயியின் அமுக்கம் ஒரு சதுர அஙகுலத்திற்கு $\frac{9 \times 2240}{144\pi}$ இருத்தல் நிறை; சிறிய முசலத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{4}\pi$ சதுர அங்குலமாதலால இம்முசலத்தில் விசை

$$= \frac{9 \times 2240 \times \frac{1}{4}\pi}{144\pi} = \frac{9 \times 560}{144} = 35$$ இருததல் நிறை ஆகவேண்டும்.

உதாரணம் 2. இரண்டு அமுங்கிகளின் பரப்பளவுகள் $\frac{1}{4}$ சதுர அங்குலமும் 10 சதுர அங்குலமுமாகிப் பம்பி அமுங்கியானது 2 அங்குலமும் 28 அங்குலமும் நீளங்களாயுள்ள புயஙகளைக் கொண்ட நெம்பாற் செலுத்தப்படுமாயின், நெம்பினது நீள்புயத்தின் முனையில் 15 இருத்தல் விசையைப் பிரயோகித்தலால் வெல்லப்படுந் தடையைக் காணல்.

அமுங்கியில் விளையுளுதைப்பு Q வாகுக. நெம்பின் சமநிலைக்கு, பொறுதி பற்றித் திருப்பங்களை எடுக்க,

$$Q \times 2 = 15 \times 28 ;$$

$$\therefore \; Q = 15 \times 14 = 210$$ இரு. நிறை.

210 இரு. நிறையாகிய இவ்விசை சிறிய அமுங்கியின் $\frac{1}{4}$ சதுர அங்குலப் பரப்பளவிற் பரம்பியிருக்கும்.

$\therefore$ ஆக்கப்படும் அமுககம் $= 210 \div \frac{1}{4} = 210 \times 4 = 840$ இரு. நிறை (ஒரு. சதுர அங்குலத்திற்கு).

இவ்வமுககம் 10 சதுர அங்குலப் பரப்பளவுள்ள பெரிய அமுங்கிக்குக் கடத்தப்படும.

$\therefore$ பெரிய அமுங்கியில் மேல்முக உதைப்பு $= 840 \times 10$ இரு. நிறை.

ஆகவே, 8400 இரு. நிறைத் (அல்லது $3\frac{3}{4}$ தொன் நிறை) தடையை அழுத்தி வெல்லும்.

உதாரணம் 3. **ஈற்று உதாரணத்தில் நெம்பின் முனை ஒவ்வோரடிப்பிலும் 1 அடி உயர்த்தித் தாழ்த்தப்படுமாயின், நெருக்கி அமுங்கியை 1 அங்குலம் உயர்த்துதற்கு வேண்டிய அடிப்புகளின் தொகையைக் காணல்.**

நெம்பின் புயங்கள் முறையே 28 அங்குலமும் 2 அங்குலமுமாதலால், நீளமான புயத்தின் முனை 1 அடி தாழ்த்தப்பட பம்பி–அமுங்கி $\frac{1}{14}$ அடி அல்லது $\frac{6}{7}$ அங்குலம் விழும்.

ஆகவே, பம்பி உருளையிலிருந்து வெளியே செலுத்தப்படும நீரின் கனவளவு $\frac{1}{4}\times\frac{6}{7}$ கன அங்குலம் அல்லது $\frac{3}{14}$ கன அங்குலமாகும். இக்கன வளவு நெருக்கி உருளைக்குட் செலுத்தப்படும்; ஆகவே நெருக்கி–அமுங்கி ஒவ்வோரடிப்பிலும் $\frac{3}{14}\div 10$ அங்குலம் அல்லது $\frac{3}{140}$ அங்குலம் எழும்.

ஆகவே அதனை 1 அங்குலம் உயர்த்துதற்கு வேண்டிய அடிப்புகளின் தொகை

$$=\frac{140}{3}=46\tfrac{2}{3}.$$

ஆகவே 46 முற்றிய அடிப்புகள் செய்யப்பட்டு, 47 ம் அடிப்பில் நெம்பு மூன்றில் இரண்டு பங்கு தாழ்த்தப்பட வேண்டும்.

பயிற்சி I

1. ஒரு கலன் நீர் 10 இருத்தலும், ஒரு கன அடி 1000 அவுன்சும நிறுக்குமாயின் ஒரு கன அடியில் எத்தனை கலன் உண்டு?

2. பின்வரும அமுக்கங்களை ஒப்பிடுக (அதாவது அவற்றின் விகிதத்தைக் காண்க).

   (i) ஒரு சதுர அங்குலத்திற்கு 14 இரு. நிறையும ஒரு சதுர யாரிற்கு 8 தொன நிறையும;

   (ii) ஒரு சதுர அங்குலத்திற்கு 28 இரு. நிறையும ஒரு சதுர அடிக்கு 16·2 தொன நிறையும்;

   (iii) ஒரு சதுர சதமமீற்றருக்கு 28 கிராம நிறையும் ஒரு சதுர மீற்றருக்கு 16·1 கிலோ கிராம் நிறையும்.

3. நீரால் நிரப்பப்பட்ட ஓர் அடைத்த சதுரமுகி வடிவுடைய பாணடம 10 அடி அளவுள்ள ஓரங்களை உடையது 6 சதுர அங்குலப பரப்பளவுடைய முசலம ஒன்று ஒரு பக்கத்தில இடப்பட்டு 12 இரு. நிறை விசையோடு உள்முகமாக நெருக்கப்படும ஆறு பக்கங்களிலும ஆக்கப்படும உதைப்பின அதிகரிப்பைக காணக.

4. ஒரு போத்தலின கழுத்தினதும அடியினதும விட்டம் முறையே $\frac{1}{2}$ அங்குலமும் 4 அங்குலமுமாகும. போத்தல நீரால நிரப்பப்பட்டிருக்க கிடேசு 1 இறுத்தல விசையோடு நெருக்கப்படுமாயின போத்தல அடியிலே உஞற்றப்படும விசை என்ன?

5. 10 மிமீ. உயரமும 10, 10, 12 மிமீ. பக்கங்களுள்ள இரு சமபக்க முக்கோணி வடிவான அடியையுங் கொண்ட ஓர அரியம, ஒரு சதுர சதம மீற்றருக்கு 100 கிராம நிறை சராசரி அமுக்கமாகவுள்ள பாயியில வைக்கப்படும. அரியத்தின முகங்களில உதைப்புக்களையும, அவற்றிற்கும் அரியத்தை நிரப்புதற்கு வேண்டிய நீரின நிறைக்குமுள்ள விகிதங்களையுங் காண்க?

6. (ஈற்றுக் கேள்வியில) அரியத்தின் அளவுகள் மேற்கூறிய அளவுகளின் பத்தில் ஒன்றுக்கு ஒடுக்கப்படுமாயின் இவ்விகிதங்கள் அவற்றின் முன்னுள்ள பெறுமானங்களின் பத்தில் ஒன்றுகும் எனக் காட்டுக. இதன் துணைகொண்டு, ஓரியம் போதிய அளவு சிறிதாய் எடுக்கப்படுமாயின அது கொள்ளும் பாயியின் நிறை அதன் முகங்களில் பாயியின் உதைப்புக்களோடு ஒப்பிடுகையில் புறககணிக்கப்படலாமெனக் காட்டுக.

7. ஒரு நீரியலமுத்தியில பம்பி-அமுங்கி 1 சமீ. விட்டமுள்ள ஒரு உருளையாகும். அது 7 சமீ நீளமுள்ள ஒரு அடிப்பை ஆககும். நெருக்கி-அமுஙகி 20 சமீ. விட்டமுள்ளது. பின்வருவனவற்றைக் கணிக்க : (i) பம்பி-அமுங்கியில் 100 இரு. நிறை பிரயோகிக்கப்படுமிடத்து (உராய்வு புறக்கணிக்கப்பட) நெருக்கியினுள்ள அமுக்கம், (ii) நெருக்கி-அமுங்கியிலே தாககும் விசை, (iii) நெருககி-அமுங்கியை 10 சமீ. உயர்த்துதற்கு பம்பி ஆக்கவேண்டிய அடிப்புகளின் தொகை.

8. பிரமா அமுததியில இரண்டு உருளைகளினதும் பரபபளவுகள் $\frac{1}{6}$ சதுர அங்குலமும் 5 சதுர அங்குலமுமாகும் ; அதனைத் தொழிற்படுத்தும் நெம்பினது புயங்களின் நீளஙகள 36 அஙகுலமும் $1\frac{1}{8}$ அங்குலமுமாகும். நீள் புயத்தில் 15 இருத்தல் விசை பிரயோகித்தலால் எவ்வளவு உதைப்பு பெறப்படும்.

9. பிரமா அமுததியில இரு முசலங்களின் பரப்பளவுகள் முறையே $\frac{1}{4}$ சதுர அங்குலமும் 16 சதுர அங்குலமுமாகும். நெம்பினது புயங்களின் நீளங்கள் 20 : 1 என்னும் விகிதத்திலிருககுமாயின், 16,000 இருத்தல நிறையுள்ள ஒரு உதைப்பை ஆக்குதற்கு நெம்பின் முனையில யாது விசை பிரயோகிக்கபபட வேண்டும் ?

10. விட்டம் 1 அங்குலமாகவுள்ள பம்பி-அமுங்கிகொண்ட ஒரு பிரமா அமுத்தியை 10 : 1 என்னும் வேக விகிதமுள்ள நெம்பு தொழிற்படுத்தும். மொங்கானின் விட்டம் 1 அடி. நெம்பின் கைபிடிக்கு 20 இருத்தல் நிறையுள்ள விசை பிரயோகிக்கப்படும். அமுத்தியின் வினைத்திறன் 70% ஆயின் மொங்காறைல் உஞற்றப்படும் விசையைக் காண்க.

11. ஒரு நீரியலமுததியின் மொங்கானினுடைய குறுககுவெட்டுப் பரப்பளவு முசலப் பரபபளவின் n மடங்காகும். முசலம், மொங்கான் என்பனவற்றில் உராய்வால் ஆய தடைகள் முறையே F, R இருததல் நிறைகளாயின் மொங்கானில் W நிறையை உயர்த்துதறகு முசலத்தில் $(W+R+nF)/n$ இருத்தல் நிறையுடைய விசை பிரயோகிகக வேண்டுமெனக் காட்டுக.

12. 1 இருத்தல = 453·6 கிராம், 1 அங்குலம் = 2·54 சதம மீறறர் என்பன தரப்படுமாயின் சதுர அஙகுலத்திற்கு 30 இருத்தல் நிறையுடைய அமுக்கத்தை சதுர சதம மீற்றறிற்குக கிலோ கிராமில் உணர்த்துக.

விடை

1. $6\frac{1}{4}$. 2. (i) 81 : 80 ; (ii) 1 : 9 ; (iii) 400 : 23.

3. 172, 800 இரு. நிறை. 4. 64 இரு. நிறை.

5. 100 கிராம் நிறை, 100 கிராம் நிறை, 120 கிராம் நிறை, 48 கிராம் நிறை, 0·0048 0·0048, 0·004, 0·01.

7. (i) $127\frac{3}{11}$ இரு நிறை/சதுர அங்குலம் (ii) $17\frac{6}{7}$ தொன் நிறை, (iii) $571\frac{3}{7}$.

8. 14,400 இரு. நிறை. 9. $12\frac{1}{2}$ இரு. நிறை. 10. 9 தொன் நிறை.

12. 2·11 கி. கி./சதுர சமீ.

அதிகாரம் II

அடர்த்தியும் தன்னீர்ப்பும்

11. திணிவும் நிறையும்

இப்படிப்பு முறைமையாய் இயக்கவியலுக்கு உரியதானபோதிலும்; திணிவு, நிறை என்பனவற்றின் வேறுபாடு நீர்நிலையியலில் முக்கியமானதால் இவ் வேறுபாட்டையும், இருத்தல், இருத்தலி என்பனவற்றின் வேறுபாட்டையும் இங்கு எடுத்து நோக்குவோம்.

சடப்பொருள் என்பது ஓர் அடிப்படை எண்ணக்கருவாகும். அதனைத் திருப்திகரமாக நாம் வரையறுக்க முடியாது. எமது தொடுகைப் புலனுணர்வாலும், அதனிற் சடுதியான ஒரு இயக்க மாற்றத்தை ஆக்கற்கு வேண்டிய எத்தனத்தாலுமே நாம் அதனை அறிகிறோம். இப் பின்னதான இயல்பைச் **சடத்துவம்** எனக் கூறுவோம். ஒரு உடலின் சடத்துவ அளவு அதன் **திணிவு** எனப்படும்.

ஒரு உடலின் **நிறை** என்பது அதனைப் புவி கவரும் விசையாகும்; ஆகவே வேறு யாதுமொரு விசைக்கு உள்ளதுபோல் இதனோடு தொடர்புடைய ஒரு **திசை** இதற்கும் உண்டு. ஓர் உடலின் திணிவுக்குத் திசையில்லை; அது ஒரு கணியம் மட்டுமே. பருமன் கொண்டதும் திசையற்றதுமாகிய திணிவு, வெப்பநிலை, கனவளவு போன்ற கணியங்களை **எண்ணிக்** கணியங்களென்றும், திசையும் பருமனுங் கொண்ட விசை, வேகம், ஆர்முடுகல் போன்ற அளவுகளை **காவிகள்** என்றும் வேறுபாடு காட்டப்படும். எனவே திணிவு ஒரு எண்ணியாகும், நிறை ஒரு காவியாகும். நாம் இதுவரை வழங்கிய நிறையலகு ஒரு இருத்தற்றிணிவின் நிறையாகும்; இது ஒரு விசையலகாகவும் இசைவாகக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. ஒரு இருத்தற்றிணிவு ஒரு இருத்தல் நிறையுள்ளது என்பதை உணரல் வேண்டும். ஏனெனில் ஒரு இருத்தற்றிணிவைப் புவியானது ஒரு இருத்தல் நிறையுள்ள விசையாலேயே கவரும். இந்நூலெங்கும் திணிவு அலகுகளுக்கு இரு. எனவும், நிறையலகுகளுக்கு இரு. நிறை எனவும் எழுதுதலால் திணிவு அலகுகளையும் நிறை அலகுகளையும் பிரித்துக் காட்டுவோம். இதேபோல ச. கி. செ. தொகுதியில் கிராம் என்பதை கிராம் நிறை என்பதிலிருந்து பிரித்துக் காட்டுவோம். இக்காரணத்தால் அதிகாரம் 1 இல் வழங்கிய எல்லா விசைகளும் இரு. நிறை, தொன் நிறை, அல்லது கிராம் நிறை எனத் தரப்பட்டுள்ளன.

விசையை இரு. நிறையில் அளத்தற்கு வேறானதும் அடிப்படையாய் முக்கியமானதுமான முறையொன்றுண்டு. புவியானது ஓர் இருத்தற்றிணிவைப் புவியின்மீதுள்ள அதன் நிலைக்கேற்பச் சிறிதளவு மாறும் விசையோடு கவரும். ஆகவே, 1 இரு. நிறை புவியின் எல்லாப் பாகங்களிலும்

மாறிலியாகாது. நியூற்றனின் இரண்டாம் இயக்க விதியிலிருந்து வேறொரு விசையளவீடு பெறப்படும். இவ்விதியிலிருநது (*Tutorial Dynamics*, ப. 80 ஐப் பார்க்க) ஒரு விசை ஓய்விலுள்ள ஒரு உடலைத் தாக்கி ஓர் ஆர்முடுகலை ஆக்குமிடத்து, இவ்விசையானது உடலின் திணிவு, ஆர்முடுகல், என்பன வற்றின் பெருக்கத்திற்கு விகிதசமமாகுமென்பது உய்த்தறியப்படலாம். உடலின் திணிவு m இரு. எனவும், ஆக்கிய ஆர்முடுகல் f அடி/செக்./செக். எனவும் உத்தேசிக்க ; ஆயின், F ஆனது (இன்னுங் குறிக்கப்படாத அலகில்) விசையைக் குறிக்குமாயின்.

$$\mathrm{F} \propto mf,$$

அல்லது $\mathrm{F} = kmf,$

இஙகு k விகிதசம மாறிலியாகும். விசையலகு குறிக்கப்படாததால், $k = 1$ ஆகுமாறு நாம் அதனைத் தேர்ந்தெடுத்து

F விசையலகுகள் $= mf$

என எழுதலாம் ; இங்கு m ஆனது இருததலிலும், f ஆனது அடி/செக்./செக். இலும் உள்ளன. ஆகவே m ஆனது ஒரு இருத்தலாயும், f ஆனது 1 அடி/செக்/செக். ஆயும் ஆகுமிடத்து நாம் இப்புதிய விசையலகை வரை யறுத்துளளோம். அதாவது,

1 விசையலகு 1 இரு. திணிவுக்கு 1 அடி/செக்^{2}. ஆர்முடுகலைக் கொடுக்கும்.

இவ்வலகே **இருத்தலி** எனப்படும் ; இது புவியீரப்பால ஆய சிறிதளவு மாறும் ஆர்முடுகலைச் சாராதாகையால் இது ஒரு **தனி** அலகு எனப்படும் ; 1 இரு. நிறை **ஈர்ப்பு** விசையலகு எனப்படும். எனினும் இருத்தலியும் இருத்தல் நிறையும் விசையலகுகளாகையால் அவற்றிற்கிடையே ஒரு தொடர்பை நாம் எளிதில துணியலாம். புவியில் ஒரு குறித்த இடத்தில் (புவியீர்ப்பினுலான ஆர்முடுகல்) g ஆனது 32 அடி/செக்./செக். பெறுமா னம் உடையதெனக் கொள்ளப்படுமிடதது,

1 இரு. நிறை 1 இருததறறிணிவுக்கு 32 அடி/செக்./செக். என்னும் ஆர்முடுகலைக் கொடுக்கும். ஆனல், 1 இருததலி 1 இருத்தற்றிணிவுக்கு 1 அடி/செக்./செக். என்னும் ஆர்முடுகலைக கொடுத்தலால் 1 இருத்தற் றிணிவுக்கு 32 அடி/செக்./செக். என்னும ஆர்முடுகலைக் கொடுத்தற்கு 32 இருத்தலி வேண்டும் ; ஆகவே, புவியில் $g = 32$ அடி/செக்^{2}. ஆயுளள ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் 32 இருத்தலி 1 இரு. நிறைக்குச் சமானமா கும். வேறு யாதும் ஒரு இடத்தில் g இன் எண பெறுமானம் யாதெனினும்

g இருத்தலி 1 இரு. நிறைக்குச் சமானமென

நாம் பெறுவோம.

ச. கி. செ. அலகுகளில் **தைன்** என்பது இருத்தலிக்கு ஒத்த விசையல காகும் ; g ஆனது 981 சமீ./செக்^{2}. என உத்தேசிக்க,

1 இ. நிறை 1 கி. திணிவுக்கு 981 சமீ./செக்./செக். என்னும் ஆர்முடுகலைக் கொடுக்கும் ;

ஆனால், 1 தைன் 1 கி. திணிவுக்கு 1 சமீ./செக்./செக். என்னும் ஆர்முடுகலைக் கொடுத்தலால்,

981 தைன் 1 கி. திணிவுக்கு 981 சமீ./செக்./செக். என்னும் ஆர்முடுகலைக் கொடுக்கும்,

அதாவது,

981 தைன் 1 கி. நிறைக்குச் சமானமாகும்.

12. அடர்த்தி

ஒரு அலகுக் கனவளவின திணிவே ஒரு பதார்த்தத்தின் அடர்ததியாகும். அது, கன அடிக்கு இருத்தலில், அல்லது கன அங்குலத்திறகு இருத்தலில், அல்லது கன சதமமீற்றருக்கு கிராமில், அல்லது வேறும் இவ்வாறே உணர்ததப்படலாம்.

உதாரணமாக, ஒரு கன அடி தூய நீா $4°$ ச. யில ஏறக்குறைய 1000 அவுன்சு நிறை உடையதால், ஒரு கன அடி தூய நீா 1000 அவுன்சு திணிவு உடையது, அதாவது

$$\text{தூய நீரின் அடர்த்தி} = 1000 \text{ அவுன்சு/கன அடி},$$
$$= 62{\cdot}5 \text{ இரு./கன அடி}.$$

(உண்மையாக, கன அடிக்கு 62·3 இரு. எனபதே கூடிய செம்மையான பெறுமானமாகும். ஆனால் 62·5 அலலது $\frac{1000}{16}$ என்பது கூடிய இசைவான எண்கணித அண்ணளவாகும்.)

ச. கி. செ. தொகுதியில், $4°$ ச. யில் ஒரு கன சதமமீற்றர் தூய நீரின் நிறை ஒரு கிராமென வரையறுக்கப்படுதலால தூய நீரின் அடர்த்தி $=1$ கி./கன சதம மீற்றர். ஒரு பதார்த்தததின் அடாத்தியை ρ (ரோ) என்னுங் கிரேக்க எழுத்தாற் குறித்தல் வழக்கமாகும்.

V கன அடி கனவளவும், கன அடிககு ρ இரு. அடர்த்தியுமுள்ள உடல் உண்டெனின், இருத்தலில் அதன் திணிவு (m),

$$m = V\rho$$

என்பதாலே தரப்படுமென்பது தெளிவாகும்.

உதாரணம். 2சமீ. விட்டமுள்ள ஒரு கோளவடிவான ஈயக் குண்டு 45·7 கி. நிறை என்பது தரப்படுமாயின் ஈயத்தின் அடர்த்தியைக் காணல்.

குண்டு, 1 சமீ. ஆரையுள்ள கோளமாகும்.

ஆகவே, அதன் கனவளவு $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (1)^3 = \frac{88}{21}$ கன சமீ.

அன்றியும், குண்டின் திணிவு $= 45{\cdot}7$ கி.

$\therefore$ ஈயத்தின் அடர்த்தி $= 45{\cdot}7 \times \frac{21}{88} = 10{\cdot}9$ கி./கன சமீ.

3—R 19640 (12/66)

13. தன்னீர்ப்பு

ஒரு பதார்த்தத்தின் தன்னீர்ப்பு என்பது அப்பதார்த்தத்தின் யாதுமொரு கனவளவின் நிறை சம கனவளவுடைய நியம பதார்த்தத்தின் நிறைக்குக் கொள்ளும் விகிதமாகும்.

பொதுவாக 4°ச. வெப்பநிலையிலுள்ள தூய நீரே நியம பதார்த்தமாகக் கொள்ளப்படும். அன்றியும் தன்னீர்ப்பானது ஒரு நிறையோடு வேறொரு நிறை கொள்ளும் விகிதமாதலால், அது ஒரு தூய எண்ணாகும். அதாவது, அதற்குப் பரிமாணங்களில்லை. உதாரணமாக, ஒரு கன அடி கடல் நீர் 64 இரு. நிறையாயின், ஒரு கன அடி தூய நீர் 62·5 இரு. நிறையென் பதைக் கவனித்துக்கொண்டு, அக்கடல் நீரின் தன்னீர்ப்பை நாம் காண லாம்.

மேலுள்ள வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$$\text{கடல் நீரின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{64}{62\cdot5} = 1\cdot024.$$

மறுபடியும், இரசத்தின் தன்னீர்ப்பு ஏறக்குறைய 13·6. இதன் கருத்து, ஒரு கன அடி இரசத்தின் நிறை ஒரு கன அடி தூய நீர் நிறையின் 13·6 மடங்கு என்பதே, அதாவது அதன் நிறை

$$13\cdot6 \times 1000 \text{ அவுன்சு},$$

$$\text{அல்லது } 850 \text{ இரு}.$$

ஒரு பதார்த்தத்தின் அடர்த்திக்கும் தன்னீர்ப்புக்கும் உள்ள தொடர்பு பின்வருமாறு உறுதியாக்கப்படலாம்.

$$\text{ஒரு பதார்த்தத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{பதார்த்தத்தின் யாதும் கனவளவின் நிறை}}{\text{சம கனவளவுள்ள நீரின் நிறை}}$$

(வரைவிலக்கணத்தின்படி)

$$= \frac{\text{பதார்த்தத்தின் யாதும் கனவளவின் திணிவு}}{\text{சமகனவளவு நீரின் திணிவு.}}$$

$$= \frac{\text{பதார்த்தத்தின் அலகுக் கனவளவின் திணிவு}}{\text{நீரின் அலகுக் கனவளவின் திணிவு.}}$$

$$= \frac{\text{பதார்த்தத்தின் அடர்த்தி}}{\text{நீரின் அடர்த்தி}}$$

ஆகவே,

பதார்த்தத்தின் அடர்த்தி = பதார்த்தத்தின் தன்னீர்ப்பு × நீரின் அடர்த்தி.

தன்னீர்ப்பின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து யாதும் கனவளவுடைய ஒரு பதார்த்தத்தின் நிறை = பதார்த்தத்தின் தன்னீர்ப்பு × சமகனவளவுடைய நீரின நிறை ஆகுமென்பதைக் கவனிக்க ; இது குறியீட்டில் இசைவாய் இடப்படலாம். s தன்னீர்ப்பும் $\mathbf{V}$ கன அடி கனவளவும் கொண்ட

ஒரு பதார்த்தத்தின் நிறை W என்பதாயும், நியமப் பதார்த்தத்தின் (நீர்) அலகுக் கனவளவின் நிறை w என்பதுமாயின், V கன அடியுள்ள நீரின் நிறை Vw ஆகி மேலுள்ள தொடர்பு

$$W = sVw$$

ஆகும்.

ச. கி. செ. தொகுதியில் நீரின் அடர்த்தி 4°ச இல் கன சதம மீற்றருக்கு 1 கிராமாகத் தேரப்படுதலால்,

$$\text{பதார்த்தத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{பதார்த்தத்தின் அடர்த்தி}}{\text{ஒரு கிராம்/கன சதமமீற்றர்}},$$

ஆகவே, ஒரு பதார்த்தத்தின் தன்னீர்ப்பானது ச. கி. செ. அலகுகளில் அதனடர்த்தியின் எண்பெறுமானமாகும்.

உதாரணம் 1. **ஒரு பளிங்குத் துண்டின் அடர்த்தி கன அடிக்கு 155·75 இரு. அதன் தன்னீர்ப்பு யாது ?**

ஒரு கன அடி பளிங்கின் நிறை = 155·75 இரு.

ஒரு கன அடி நீரின் நிறை = 62·5 இரு.

$$\therefore \text{தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{பதார்த்தத்தின் நிறை}}{\text{சமகனவளவுடைய நீரின் நிறை}}$$

$$= \frac{155{\cdot}75}{62{\cdot}5} = 2{\cdot}492.$$

உதாரணம் 2. **ஈயத்தின் தன்னீர்ப்பு 11·4 ஆயின் ஒரு கன அங்குல ஈயத்தின் நிறையை அவுன்சிற் காணல்.**

ஒரு கன அடி நீரின் நிறை = 1000 அவுன்சு.

∴ ஒரு கன அங்குல (அ–து $\frac{1}{1728}$ கன அடி) நீரின் நிறை = $\frac{1000}{1728}$ அவுன்சு.

ஆனால், ஒரு கன அங்குல ஈயத்தின் நிறை இதன் 11·4 மடங்கு.

$$\therefore \text{ஒரு கன அங்குல ஈயத்தின் நிறை} = \frac{1000 \times 11{\cdot}4}{1728}$$

= 6·59 அவுன்சு, அண்ணளவாக.

உதாரணம் 3. **ஒரு கன அடி நீரின் நிறை 62·5 இரு. பொன்னின் தன்னீர்ப்பு 19·25 ஆகுமிடத்து ஒரு கன அங்குலப் பொன்னின் நிறையென்ன ?**

ஈற்றுப் பிரிவின் குறிப்பீட்டைப் பிரயோகித்தலால்,

$w = 62{\cdot}5$ இரு. நிறை, $s = 19{\cdot}25$, V = 1 கன அங்குலம் அல்லது $\frac{1}{1728}$ கன அடி.

$$W = 19{\cdot}25 \times \frac{1}{1728} \times 62{\cdot}5 \text{ இரு. நிறை.}$$

$$= 0{\cdot}696 \text{ இரு. நிறை.}$$

14. கலவைகளின் தன்னீர்ப்பு

தன்னீர்ப்புத் தெரிந்த பொருட்களின் தந்த கனவளவுகள் கலக்கப் படுமாயின், நாம் அவற்றின் வேறுவேருன நிறைகளைக் கணிக்கலாம்; ஆகவே, மொத்த நிறையும் மொத்தக் கனவளவுந் தெரியப்படுதலால் நாம் கலவையின் தன்னீர்ப்பைக் கணிக்கலாம்.

உதாரணம் 1. கடல் நீரின் தன்னீர்ப்பு 1·026 ஆயின், 2 கன அடி தூய நீரும் 3 கன அடி கடல் நீருங்கொண்ட கலவையின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

2 கன அடி தூய நீரின் நிறை 2000 அவுன்சு; 3 கன அடி கடல் நீரின் நிறை $3\times 1{\cdot}026\times 1000$ அவுன்சு $=3078$ அவுன்சு.

ஆகவே, கலவையின் நிறை $=5078$ அவுன்சு.

அன்றியும் கலவையின் கனவளவு $=5$ கன அடி.

∴ சமகனவளவுடைய தூய நீரின நிறை $=5\times 1000$ அவுன்சு.

∴ கலவையின் தன்னீர்ப்பு $=\frac{5078}{5000}=1{\cdot}0156$.

கூறுகளின் உண்மைக் கனவளவுகள் தெரியவேண்டியதில்லை; அவற்றின் தொடர்பு விகிதசமம் தெரிந்தாற்போதும். இவ் வகையில், மாதிரிகளாக எடுக்கக்கூடிய பின்வரும் உதாரணங்களிற் காட்டியதுபோல நாம் தொடரலாம்.

உதாரணம் 2. அற்ககோலின் தன்னீர்ப்பு 0·794 ஆகவும், கிளிசறீனின் தன்னீர்ப்பு 1·26 ஆகவும் இருப்பின், 3 பங்கு (கனவளவு) அற்ககோலும் 2 பங்கு நீரும் 1 பங்கு கிளிசறீனுங் கொண்ட கலவையின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

1 பங்கு நீரின் நிறை w ஆகுக.

ஆயின், 3 பஙகு அற்ககோலின் நிறை $=3\times 0{\cdot}794w$.

$=2{\cdot}382w$.

2 பஙகு நீரின் நிறை $=2w$.

1 பஙகு கிளிசறீனின் நிறை $=1{\cdot}26w$.

∴ கலவையின் 6 பஙகுகளினதும் நிறை $=5{\cdot}642w$.

சமகனவளவுடைய நீரின் நிறை $=6w$;

∴ கலவையின் தன்னீர்ப்பு $=\dfrac{5{\cdot}642}{6}=0{\cdot}9403$.

உதாரணம் 3. பொற்ருசியம் 3 கனவளவும் இரசம் 7 கனவளவுங் கலக்கப்பட்டு ஓர் இரசக்கலவை ஆக்கப்படும்; கலவையின் கனவளவு, கூறுகளின் கனவளவின் ஐந்தில் நாலு பங்காகும். இரசம் பொற்ருசியம் ஆகியவற்றின் தன்னீர்ப்புக்கள் முறையே 13·596, 0·860 ஆயின், கலவையின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க.

ஒரு கனவளவு நீரின் நிறை w ஆகுக.

ஆயின், பொறருசியத்தின் நிறை $= 3w \times 0{\cdot}860,$

இசரத்தின் நிறை $= 7w \times 13{\cdot}596$

இரசம் பொற்றுசியம் ஆகியவற்றின் கனவளவு $= 3+7=10.$

இரசக் கலவையின் கனவளவு $= \frac{4}{5} \times 10 = 8.$

∴ சம கனவளவுள்ள நீரின் நிறை $= 8w.$

∴ தன்னீர்ப்பு $= \dfrac{\text{இரசக கலவையின் நிறை}}{\text{சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறை}}$

$$= \frac{3w \times 0{\cdot}860 + 7w \times 13{\cdot}596}{8w} = 12{\cdot}219$$

(a) கனவளவாயக் கலவை. முன்னுள்ளதைப் பொதுமைப்படுத்தலாம். s_1, s_2, s_3, ... எனனுந் தன்னீர்ப்புக்கள் உடைய பாயிகளின V_1, V_2, V_3, ... என்னுங் கனவளவுகள் கலக்கப்படுமிடத்துப பெறப்படும் கலவை U கனவளவும் S என்னுந் தன்னீர்ப்பும் உடையதாயின், கலவையின் நிறை SUw ஆகும்; இங்கு w என்பது நியம பதார்த்தத்தின் அலகுக் கனவளவின் நிறையாகும்; கலவையின் மொத்த நிறை கூறு நிறை களின கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனுகவேண்டும், அதாவது

$$s_1V_1w + s_2V_2w + s_3V_3w + \ldots \quad \text{என்பதற்குச் சமன்.}$$

ஆயின் $SUw = s_1V_1w + s_2V_2w + s_3V_3w + \ldots$

அல்லது $S = (s_1V_1 + s_2V_2 + s_3V_3 + \ldots)/U.$

கலகுமிடத்து கனவளவில் யாதும் சுருக்கம் அல்லது விரிவு இல்லாவிடின்

$$U = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots \quad \text{ஆகி}$$

$$S = \frac{s_1V_1 + s_2V_2 + s_3V_3 + \ldots}{V_1 + V_2 + V_3 + \ldots} \text{ ஆகும்.}$$

(b) நிறையாய்க் கலவை. s_1, s_2, s_3, ...என்னுந் தன்னீர்ப்புக்கள உடைய பாயிகளின W_1, W_2, W_3, ... என்னும நிறைகள் கலக்கப்படுமிடத்து பெறப்படுங் கலவை U கனவளவும் S தன்னீர்பபும் உடையதாயின், முனபோல் கலவையின் நிறை SUw ஆகும்; இஙகு w நியம பதார்த் தத்தின் அல்குக் கனவளவின் நிறையாகும்.

மொத்த நிறை கூறு நிறைகளின் கூட்டுத்தொகையாதலால்

$$SUw = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots \quad \text{ஆகி}$$

$$S = (W_1 + W_2 + W_3 + \ldots)/Uw \text{ ஆகும்.}$$

கலக்கும்போது கனவளவில் யாதும் சுருக்கம் அல்லது விரிவு இல்லாவிடின் U என்னும் இறுதிக் கனவளவு $\frac{W_1}{ws_1}, \frac{W_2}{ws_2}, \frac{W_3}{ws_3}, \ldots$ என்னுங் கூறுக் கனவளவுகளின் கூட்டுத்தொகையாகும் ; ஆகவே,

$$U = \frac{W_1}{ws_1} + \frac{W_2}{ws_2} + \frac{W_3}{ws_3} + \ldots \quad \text{ஆகி,}$$

$$S = \frac{W_1 + W_2 + W_3 + \ldots}{\frac{W_1}{s_1} + \frac{W_2}{s_2} + \frac{W_3}{s_3} + \ldots} \quad \text{ஆகும்.}$$

இவ்வாறு நாம் பெற்ற முடிபுகளை சிக்மா (Σ) குறியீட்டால் இசைவாக உணர்த்தலாம் ; இங்கு ΣW_r என்பது W_1, $W_2, \ldots$ போன்ற எல்லாக் கோவைகளின் கூட்டுத்தொகையைக் குறிக்கும். நாம் $W_1 + W_2 + W_3 + \ldots$ என்பதற்குப் பதிலாக ΣW_r என்பதை எழுதலாம். இதேபோல $s_1V_1 + s_2V_2 + s_3V_3 + \ldots$ என்பதற்குப் பதிலாக $\Sigma s_r V_r$ என்பதை எழுதலாம். எனவே கனவளவாய்க் கலவைக்கு,

$$S = \frac{1}{U}\Sigma s_r V_r$$ எனப் பெறுவோம் ; இங்கு U இறுதிக் கனவளவாகும். கனவளவில் மாற்றம் இல்லாவிடின்

$$S = \frac{\Sigma(s_r V_r)}{\Sigma V_r} \quad \text{ஆகும்.}$$

மறுபடியும் நிறையாய்க் கலவைக்கு,

$$S = \frac{1}{Uw}\Sigma W_r$$ ஆகிக், கனவளவில் மாற்றம் இல்லாவிடின்

$$S = \frac{\Sigma W_r}{\Sigma \frac{W_r}{s_r}} \quad \text{ஆகும்.}$$

உதாரணம் 1. 1 இரு. பித்தளையில் (தன்னீர்ப்பு 8) செம்பு (தன்னீர்ப்பு 8·8), நாகம் (தன்னீர்ப்பு 7) என்பனவற்றின் நிறைகளைக் காணல்.

செம்பின் நிறை x இரு. ஆகுக.

ஆயின், நாகத்தின் நிறை $1 - x$ இரு.

ஆகவே, ஒரு கன அடி நியமப் பதார்த்தத்தின் (நீர்) நிறை w இருத்தலாயின், செம்பின் கனவளவு $\frac{x}{8 \cdot 8w}$ கன அடி ஆகும். அன்றியும் நாகத்தின கனவளவு $\frac{1-x}{7w}$ ஆகிப் பித்தளையின் சேர்ந்த கனவளவு $\frac{1}{8w}$ ஆகும்.

கனவளவில் மாற்றமில்லையென நாம் கொள்வதால்,

செம்பின் கனவளவு + நாகத்தின் கனவளவு = பித்தளையின் கனவளவு,

அதாவது $$\frac{x}{8{\cdot}8w}+\frac{1-x}{7w}=\frac{1}{8w},$$

அல்லது $$7x+8{\cdot}8\,(1-x)=\frac{7\times 8{\cdot}8}{8}=7{\cdot}7\ ;$$

$$\therefore \qquad 8{\cdot}8-7{\cdot}7 = 8{\cdot}8x-7x$$

அல்லது $$1{\cdot}8x = 1{\cdot}1,$$

அதாவது $$x = \tfrac{11}{18} \text{ இரு. நிறை}$$

ஆகவே, 1 இரு. பித்தளையில் $\frac{11}{18}$ இரு. செம்பும், $\frac{7}{18}$ இரு. நாகமும் உண்டு.

உதாரணம் 2. **ஒரு பதார்த்தத்தில் m பங்கு நிறையும், வேறொரு பதார்த்தத்தில் n பங்கு நிறையுமெடுத்து ஒரு கலவை ஆக்கப்படவேண்டும். இதற்குப் பதிலாக, முதற் பதார்த்தத்தில் m பங்கு கனவளவும், இரண்டாம் பதார்த்தத்தில் n பங்கு கனவளவும் எடுக்கப்படுமாயின் கலவையின் தன்னீர்ப்பானது முறைமையான விகிதசமங்கள் எடுக்கும்போது பெறுவதிலும் பார்க்கப் பெரிதாகுமெனக் காட்டுக.**

s_1, s_2 என்பன இரு பதார்த்தங்களின் தன்னீர்ப்புக்கள் ஆகுக. S_w, S_v என்பன முறையே சரியாக நிறையில் எடுக்கப்பட்ட கலவையினதும் பிழையாகக் கனவளவில் எடுக்கப்பட்ட கலவையினதும் தன்னீர்ப்புக்கள் ஆகுக.

s_1 தன்னீர்ப்புள்ள பதார்த்தத்தில் m இருத்தலும் s_2 தன்னீர்ப்புள்ள பதார்த்தத்தில் n இருத்தலுமே எடுக்கப்படவேண்டிய அங்கங்களின் நிறைகள் என உத்தேசிக்க. ஆயின்,

$$S_w=\frac{m+n}{\dfrac{m}{s_1}+\dfrac{n}{s_2}}$$

உண்மையாய் எடுக்கப்பட்ட அங்கங்களின் கனவளவுகள் m கன அடியும் n கன அடியுமென உத்தேசிக்க.

ஆயின், $$S_v=\frac{ms_1+ns_2}{m+n}$$

$S_v > S_w$ என்பது காட்டப்படவேண்டும்.

அதாவது $$\frac{ms_1+ns_2}{m+n} > \frac{m+n}{\dfrac{m}{s_1}+\dfrac{n}{s_2}}$$

அதாவது குறுக்குப பெருக்கத்தால்

$$m^2 + mn\frac{s_1}{s_2} + mn\frac{s_2}{s_1} + n^2 > m^2 + 2mn + n^2,$$

அதாவது $$mn\left(\frac{s_1}{s_2} + \frac{s_2}{s_1}\right) > 2mn$$

அதாவது $$\frac{s_1^2 + s_2^2}{s_1 s_2} > 2,$$

அதாவது $$s_1^2 + s_2^2 > 2s_1 s_2$$

அதாவது $$s_1^2 - 2s_1 s_2 + s_2^2 > 0;$$

இடதுகைப் பககம $(s_1 - s_2)^2$ என்னும் நேர்க கணியமாதலால் இது உணமை யாகும். ஆகவே $S_v > S_w$.

பயிற்சி II

1. மழை வீழ்ச்சி 1 அஙகுலமாயின, ஓர் ஏக்கரில் எவ்வளவு தொன நீா விழும ?

2. வெறுமையாக 1 தொன நிறையுள்ள நீர்த தாஙகி தூய நீராலே நிரப்பபபட 2·50 தொன நிறையாகும். இத்தாங்கி எணணெயால நிரப்பப்பட 2·95 தொன் நிறையாயின், எணணெயின் தனனீர்ப்பைக காண்க ?

3. ஒரு லொறியினதும, வெறும பாறகொள்ளியினதும (கொள்ளளவு 4 கன யார்) நிறை 3 தொன. பாலால் நிரப்பப்பட லொறியுங கொளளியும 6 10 தொன நிறை யாகும். பாலினது தனனீாபபைக காணக. ?

4. 5 கன அஙகுல இரசம 2·45 இருததலும், 2 கன அங்குல வாாபபிரும்பு 0·52 இருததலுமாயின், இரசததின அடாததி வாாப்பிருமபின் அடாத்திக்குக கொள்ளும விகிதம யாது ?

5. ச. கி. செ. அலகுத் தொகுதியில வாாபபிருமபின அடாத்தி 7·2 ஆகும. அடி–இருததல அலகுத தொகுதியில அதன அடர்ததி எனன ?

6. கோள வடிவான குழியைக கொணட ஒரு கோள ஈயக குணடினது வெளி ஆரை R ஆகி, அதன நிறை W ஆகும. அலகுக் கனவளவுடைய ஈயததின நிறை w ஆயின் குழியின ஆரை

$$\sqrt[3]{\left\{R^3 - \frac{3}{4\pi}\frac{W}{w}\right\}}$$

எனபதறகுச சமமெனக் காட்டுக.

7. ஓருடல 54 கன அடி கனவளவும 1·1 தனனீாப்பும் உடையது. வேறொரு உடல் $\frac{1}{8}$ கன அடி கனவளவும் 4·95 தனனீாபபும உடையது. முதலுடலின் திணிவு இரண்டாமுடலின் திணிவுககுக் கொள்ளும் விகிதமெனன ?

8. 2000 அவுன்சு தூய நீா 3000 அவுனசு கடல நீர் (கடல நீரின் தன்னீாபபு 1·026) என்பனவறறின கலவையின தனனீாப்பைக காண்க.

9. அறகோல (தன்னீர்ப்பு 0·794) 3 பங்கு நிறையும், நீர 2 பஙகு நிறையும், கிளிசரீன் (தன்னீர்ப்பு 1·26) 1 பங்கு நிறையும கொணட கலவையின் தன்னீரபபைக் காணக.

10. படிகம் கலநத ஒரு பொறகட்டி 12 அவுன்சு நிறையும் 6·4 தன்னீர்ப்பும் உடையது. பொன்னின தன்னீர்ப்பு 19·35 ஆகவும் படிகததின் தனனீரப்பு 2·15 ஆகவுந் தரப்படுமாயின் இககட்டியிலுள்ள பொன்னின தொகையைக் (ஒரு தசம தானத்திற்கு) காண்க.

11. தனனீரப்பு 0·75 உடைய நான்கு பைநது அறககோல ஒரு பைந்து நீருடன் (தன்னீர்ப்பு 1) கலககப்படுகின்றது. கனவுளவில் மாற்றம் இலலையென உத்தேசிக்கப்படு மிடதது கலவையின் தன்னீரப்பைக் காணக.

12. A, B, C என்னும் மூனறு சமபாணடங்கள முறையே d_1, d_2, d_3 என்னும அடர்த்தி களுள்ள திரவங்களால அரைப்பங்கு நிரப்பப்படும். இப்போது B யானது A யிலிருந்து முற்றுய நிரப்பப்பட்டு அதன் பின்னர் C யானது B யிலிருந்து நிரபபபபடுமாயின் C யில இறுதியிற கொளளபபடும் திரவததின் அடாத்தியைக காண்க; திரவங்கள முற்றுயக கலககுமென உததேசிக்கபபடும.

13. 0·7 தனனீரப்புளள ஒரு பதார்த்தம தன நிறையின் பத்து மடஙகு நிறையுளள நீரிற் கரைககபபடும்; கரைசலின் தன்னீர்ப்பு 1·01 ஆகும். மொததக கனவளவு எவவளவால ஒடுக்கப்படுமெனக காணக?

14. s_1 தனனீர்ப்புக் கொண்ட ஒரு திரவத்தின v_1 எனனுங கனவளவு, s_2 தன்னீரப்புக கொணட ஒரு திரவத்தின v_2 எனனுங் கனவளவோடு கலககபபடும. கலவையின தன்னீர்ப்பு s ஆயின, கனவளவிலுள்ள மாற்றததைக காணக?

15. A, B என்னுந திரவங்கள 4 : 5 என்னும் விகிதத்தில் அடாத்திகளுடையன. குறிப்பிட்ட கனவளவுகள் கலக்கபபடுமிடத்து, கலவையின கனவளவு வேறுவேருக எடுககப்படும கனவளவுகளின கூட்டுததொகையிலும பாாகக பதினெட்டிலொரு பஙகாற் குறைநது காணப்படும. கலவையின அடர்ததி A யின அடர்த்திககுக கொள்ளும் விகிதம் 9 : 8 ஆகும். A யின் கனவளவு B யின கனவளவுக்குக கொள்ளும் விகிதத் தைக் காண்க.

விடை

1. 101·28.
2. 1·3.
3. 1·029.
4. 49 : 26 அல்லது 1·88. : 1.
5. 450.
7. 96 : 1.
8. 1·0154.
9. 0·913.
10. 8·96.
11. 0·8.
12. $(d_1+d_2+2d_3)/4$.
13. தொடக்கக் கனவளவின் 4·703%
14. $\{v_1(s_1-s)+v_2(s_2-s)\}/s$.
15. 3 : 1.

அதிகாரம் III

பாரமான பாயிகளின் அமுக்கம் (1)

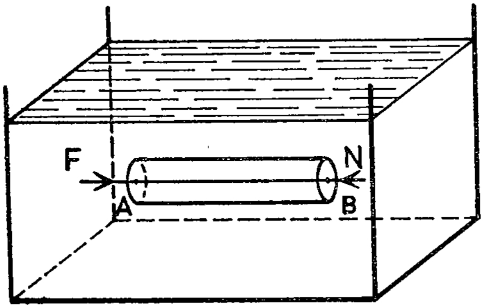
பாயிகளில் அமுக்கச் செறிவு

15. கிடைத்தளத்தில் எல்லாப் புள்ளிகளிலுஞ் சம அமுக்கச் செறிவு

புவியீர்ப்பில் ஓய்விலுள்ள ஒரு பாயியில், ஒரே கிடைத் தளத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அமுக்கச் செறிவு ஒரேயளவாகும்.

ஓய்விலுள்ள பாயியின் அகத்தேயுள்ள புள்ளிகளில் பாயியின் நிறையாலாய அமுக்கச் செறிவுகள் பற்றி எளிதாய் நிறுவப்படும் ஒரு தொகை தேற்றங்களுள் இது முதலாவதாகும்.

A, B என்பன பாயியில் ஒரே கிடைத்தளத்திலுள்ள புள்ளிகளாகுக.



படம் 9

AB யைத் தொடுத்து, இதனை அச்சாகக் கொள்ளுமாறு a சதுர அங்குலக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு உள்ள உருளை பாயியில் அமைக்கப் படுமெனக் கற்பனை செய்க. ஆயின் இப்பாயி உருளையின சமநிலை நாலு விசைகளில் சார்ந்திருக்கும் :—

(1) கீழ்முகமாக நிலைக்குத்தாய்த் தாக்கும் உருளையிலுள்ள பாயியின் நிறை.

(2) இப்பாயி உருளையில், அதன் வளைபரப்புக்குக குறுக்காக வெளிப் பாயியால் உஞற்றப்படும் விசை. இது எங்கும் வளைபரப்புக்குச் செவ்வனுதலால் நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ளது.

(3) உருளையிலுள்ள பாயியில் A யிலுள்ள முனைக்குக் குறுக்காக உஞற் றப்படும் F இரு. நிறை.

(4) B யிலுள்ள முனைக்குக் குறுக்காக இது போன்ற N இரு. நிறை யுள்ள விசை.

ஆகவே எல்லா விசைகளையுங் கிடையாகத் துணிப்போமாயின், ஈற்று இரு விசைகளை மட்டும் நாம் எடுத்து நோக்கவேண்டும் ; ஆகவே $F=N$ என நாம் பெறுவோம்.

எனவே, A யிலுள்ள முனையிற் சராசரி அமுக்கம் சதுர அங்குலத்திற்கு $\frac{F}{a}$ இரு. நிறையாகும். இது B யிலுள்ள முனையிற சதுர அங்குலத்திற்கு $\frac{N}{a}$ இரு. நிறையான சராசரி அமுக்கத்திற்குச் சமனை.

உருளை சுருங்குமெனக் கற்பனை செய்வோமாயின் F (அல்லது N), a என்பன குறையும் ;

a பூச்சியத்தை, நாட $\frac{F}{a}$ என்பதன் எல்லைப் பெறுமானம் $\frac{N}{a}$ என்பதன் எல்லைப் பெறுமானத்திற்குச் சமனாகும் ;

அல்லது கணித வேலையில் எழுதப்படுதல் போல

$$\underset{a\to o}{\text{எல்}} \frac{F}{a} = \underset{a\to o}{\text{எல்}} \frac{N}{a}$$

இவ்வெல்லைப பெறுமானம் புள்ளியின் அமுககச் செறிவு என வரை யறுக்கப்பட்டுள்ளது (§6) ; ஆகவே

A யில் அமுக்கச் செறிவு = B யில அமுக்கச் செறிவு.

ஒரே கிடைக் **கோட்டிலுள்ள** புள்ளிகளில் அமுககச் செறிவுகள் சமமாகு மெனபதை இதுவரை காட்டியுள்ளோம். ஆனல், ஒரு பாயியின் யாது மொரு புள்ளியில் எல்லாத திசைகளிலும் அமுக்கச் செறிவு ஒரேயளவாத லால் (§7) ஒரே கிடைத **தளத்திலுள்ள** எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அமுக்கச் செறிவுகள் சமமாகுமென உய்த்தறிவோம்.

ஏகவினப் பாயி என்பது, அதன் யாதும சம கனவளவுகள் எடுக்கப் படின் அச் சம கனவளவுகளின் திணிவுகள் சமமாகுமாறுள்ள ஒரு பாயி என வரையறுக்கப்படும. அதாவது, அடர்த்தி எங்கும் மாறிலியாகும்.

பாயி ஏகவினமோ இல்லையோ நாம் இப்போது நிறுவிய தேற்றம் உண்மையாகும் ; ஏனெனின் அடர்த்தி அதனிற் சேர்க்கப்படவில்லை.

16. புவியீர்ப்பில் ஓய்விலுள்ள ஏகவினப் பாயியின் யாதுமிரு புள்ளி களின் அமுக்கச் செறிவிலுள்ள வித்தியாசம் அவற்றின் ஆழ வித்தியாசத் திற்கு விகிதசமமாகும்

A, B என்பன ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளாக வும், AB அச்சாகவும் a சதுர அங்குலம் குறுக்கு வெட்டுப்பரப்பளவாகவும்

உள்ள ஒரு உருளை அமைக்கப்படும் என உத்தேசிக்க (படம் 10). p_A, p_B என்பன முறையே A, B என்பனவற்றில் சதுரஅங்குலத்திற்கு இருத்தல் நிறையில் அமுக்கச் செறிவுகள் ஆகுக ; பாயியின் அடர்த்தி கன அங்குலத்திற்கு ρ இருத்தல் ஆகுக.

பாயி உருளையின சமநிலையை எடுத்து நோக்குக. அது பின்வரும் விசைகளாலே தாக்கப்படும்.

(1) அதன் நிறை W இரு. நிறை.

(2) A யிலுள்ள முனையில் வெளிப் பாயியாலாய $p_A a$ இரு. நிறையுடைய விசை.

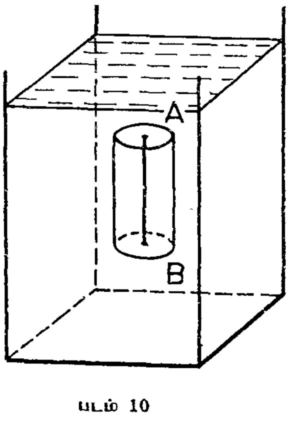
(3) B யிலுள்ள முனையில் வெளிப் பாயியாலாய $p_B a$ இரு. நிறையுள்ள விசை.

(4) உருளையின் வளைப்பரப்பில் வெளிப் பாயியாலாய விசை. இது கிடைத் தளத்தில் தாக்கமாகும்.

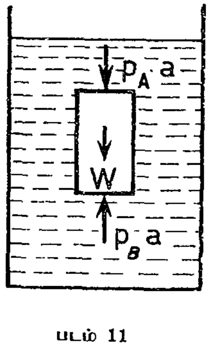
எல்லா விசைகளையும் நிலைக்குத்தாய்த் துணிப்போமாயின், மேலே எண்ணிடப்பட்ட முதல் மூன்று விசைகளுக்கிடையே உள்ள ஒரு தொடர்பைப் பெறுவோம். நாலாவதைப்பற்றி இங்கு நாம் அக்கறை கொள்ள வேண்டியதில்லை.

ஆயின் (படம் 11)

$$p_A a + W = p_B a.$$



படம் 10



படம் 11

ஆனால் AB $= z$ அங். ஆயின், உருளையின் கனவளவு za கன. அங். ஆகி அதன் திணிவு ρza இரு. ஆகும். அதன் நிறை ρza இரு. ஆதலால் மேலுள்ள தொடர்பு

$$p_B a = p_A a + \rho za,$$

அல்லது, $$p_B - p_A = \rho z,$$

அல்லது $$p_B - p_A \propto z$$ ஆகும் ;

z ஆனது A, B என்னும் புள்ளிகளின் ஆழ வித்தியாசமாதலால் புள்ளிகள் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டிலிருக்கும் வகையில் தேற்றம் நிறுவப்பட்டுள்ளது ; இரு புள்ளிகளும் ஒரே நிலைக்குத்திலில்லா வகைக்கும் இம்முடிபை நாம் விரிக்கலாம்.

படம் 12 ஐ எடுத்து நோக்குக. N என்பது A யிற்கு நிலைக்குத்தாய்க் கீழும் B யோடு ஒரே கிடையிலும் உள்ள புள்ளியாயின், ஈற்றுத் தேற்றத்தால் அதே குறியீட்டை, ஆனால் $z = \text{AN}$ என வழங்க

$$p_{\text{N}} - p_{\text{A}} = \rho z \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

ஆனால் §15 ஆல், ஒரே கிடைக்கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளில் அமுக்கச் செறிவு சமமாதலால் $p_{\text{N}} = p_{\text{B}}$. ஆயின் முன்போல்

$$p_{\text{B}} - p_{\text{A}} = \rho z.$$

இனி B யிற்கூடாக வரையப்படுங் கிடைக்கோடு முற்றுய்ப் பாயியிற் கிடக்காதெனை உத்தேசிக்க (படம் 13). ஆனால் N, M என்பன முறையே A, B என்பனவறறிற்கூடாகவுள்ள நிலைக்குத்துக்களிற் கிடக்குமாறு நாம் NM என்னுங் கிடைக்கோட்டை வரையலாமெனை உத்தேசிக்க.

ஆயின் முன்னுள்ள குறியீட்டோடு

$$p_{\text{N}} - p_{\text{A}} = \rho.\text{AN} \quad \text{(i)}$$

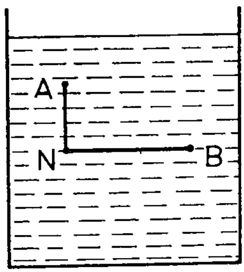
$$p_{\text{N}} = p_{\text{M}} \quad \text{(ii)}$$

$$p_{\text{M}} - p_{\text{B}} = \rho.\text{BM} \quad \text{(iii)}$$

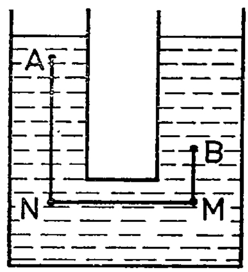
என்பன வெளிப்படையாகும்.

(iii) ஐ (i) இலிருந்து கழிக்க

$$p_{\text{N}} - p_{\text{A}} - p_{\text{M}} + p_{\text{B}} = \rho.\text{AN} - \rho.\text{BM} ;$$



படம் 12



படம் 13

∴ (ii) ஐப் பிரயோகிக்க

$$p_{\text{B}} - p_{\text{A}} = \rho(\text{AN} - \text{BN})$$

$$= \rho \times \text{A, B என்பனவற்றின் ஆழ வித்தியாசம்.}$$

இதுவும் எல்லாச் சாத்தியங்களையும் ஒழிக்காது ; ஆனால் ஒரு தொடர்ச்சியான பாதையில் நாம் எப்பொழுதும் செல்ல இதே முடிபு வலிதாகுமெனக் காணப்படும். படம் 14 என்பதையும் வரையப்பட்ட படிகளையும் எடுத்து நோக்குக. இவ்வகையிலும் நிறுவல் ஈற்று நிறுவல் போன்றதாகும், தொடர்புகள் வெளிப்படையாக

$$p_N - p_A = \rho.AN \quad \text{(i)}$$

$$p_N = p_M \quad \text{(ii)}$$

$$p_M - p_L = \rho.LM \quad \text{(iii)}$$

$$p_L = p_S \quad \text{(iv)}$$

$$p_S - p_T = \rho.TS \quad \text{(v)}$$

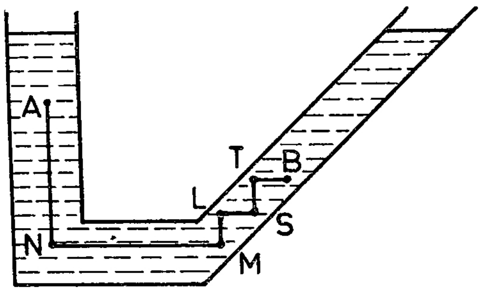
$$p_T = p_B \quad \text{(vi)}$$

(iii) ஐ (v) இறகுக் கூட்டுக.

$$p_M - p_L + p_S - p_T = \rho\ (LM + TS).$$

(iv) என்னுந் தொடர்பு $-p_L$ என்பதை $+p_S$ என்பதோடு வெட்டுதற்கு எமக்கு இடந்தரும் ; ஆயின் (ii), (vi) என்பனவற்றைப் பிரயோகிக்க

$$p_N - p_B = \rho\ (LM + TS).$$



படம் 14

இதனை (i) என்பதிலிருந்து கழிக்க

$$p_N - p_A - p_N + p_B = \rho\ (AN - LM - TS),$$

அல்லது $$p_B - p_A = \rho(AN - LM - TS)$$

$= \rho \times$ A, B என்பனவற்றின் ஆழ வித்தியாசம்.

17. ஒரு பாரமான ஏகவினத் திரவத்தில் யாதும் ஆழத்தில் அமுக்கச் செறிவைக் காணல்

ஈற்றுப் பிரிவில் இரு புள்ளிகளின் அமுக்கச் செறிவு வித்தியாசம் அவற்றின் ஆழ வித்தியாசத்திற்கு விகிதசமமாகுமெனக் காட்டியுள்ளோம். அம்முடிபை யாதும் தந்த ஆழத்தில் உண்மை அமுக்கச் செறிவைத் துணித்தற்கு நாம் பிரயோகிக்கலாம். ஈற்றுப் பிரிவின் குறியீட்டை வழங்கி A என்பதைப் பரப்பிலெடுத்துக் கொண்டு முன்போல் $AB = z$ எனக் கொள்வோமாயின்,

$$p_B - \text{பரப்பில் அமுக்கச் செறிவு} = \rho z.$$

இனி பரப்பிலுள்ள அமுக்கச் செறிவு நாம் கறபனை கொள்ளக்கூடியது போலப் **பூச்சியமாகாது.** புவியின் வளிமண்டலம், **வளிமண்டல அமுக்கமெனக்** கூறப்படும் ஓர் அமுக்கத்தை ஆக்கும். இது எல்லாப பரப்புக்களி லுந் தாக்குமாகையால் ஒரு திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பிலுந் தாக்கும். இவ்வளிமண்டல அமுக்கம தொடர்ச்சியாய் மாறும்; அது ஒரு சதுர அங்குலத்திற்கு 14·7 இரு. நிறை என்னும் வரிசையிலுள்ளது. அதி காரம் X இல் வளிமண்டல அமுக்கத்தைத் துணியும் பரிசோதனை முறை கள் பற்றிச் சிந்திப்போம்.

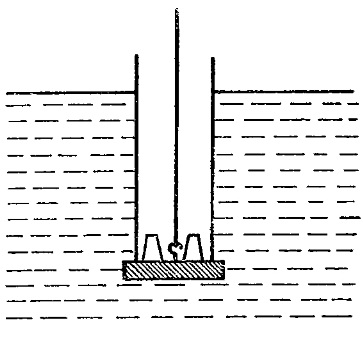
இவ்வளிமண்டல அமுக்கமானது திரவப் பரப்பிலுள்ள அமுக்கச் செறி வாகும். இதனைச் சதுர அங்குலத்திறகு P இரு. நிறை எனக் குறிப் போமாயின், ஈற்றுச் சமன்பாடு

$$p_B - P = \rho z$$

அல்லது $$p_B = P + \rho z \quad \text{ஆகும்.}$$

இது z அஙகுல ஆழத்தில் சதுர அங்குலத்திற்கு இரு. நிறையில் உண்மை யான அமுக்கச் செறிவைத் தரும்.

இரு புள்ளிகளின் அமுக்கச செறிவு **வித்தியாசம்** பற்றிய கணிப்புக் களில் வளிமண்டல அமுக்கத்தை விலக்குதல் இசைவாகியபோதிலும்; ஒரு திரவத்தில் யாதுமொரு புள் ளியிலுள்ள உண்மையான அமுக்கச் செறிவு, வளிமண்டல அமுக்கத்தின் பெறுமானத்தை உள்ளடக்கவேண் டும் என்பது கவனிக்கப்பட வேண்டும்.



படம் 15

திரவத்தின் நிறையால் மட்டும் ஆய உண்மையான அமுக்கச் செறி வின் பாகம் ஆழத்தோடு நேரடி யாக அதிகரிக்கும் என்பதே இப்பிரிவிலிருந்து வெளிப்படுவதும் செய் முறையில் மிக முக்கியமானதுமாகும். இது பரிசோதனைமுறையிற் பின

வருமாறு சரிபார்க்கப்படலாம்: ஒருருளைக் குழாயின் கீழ்முனை கயிற்றாலே தூக்கப்படக்கூடிய ஒரு தட்டையான தட்டால் அடைக்கப்படும். உருளை நீரிலே தாழ்த்தப்படுமிடத்து, ஒரு குறித்த ஆழம் அடையப்பட்ட பின்னர் தட்டு ஆழாமலே கயிறறை விடுவித்துக்கொள்ளலாம். இது நடைபெறும சரியான ஆழம், தட்டானது சற்றே ஆழும்வரை மறுபடியும் குழாயை மெதுவாய் உயர்த்துதலாற் காணப்படும. அப்போது கீழ்ப்பக்கத்தில் அமுக் கத்தால் ஆக்கப்படும் விசை தட்டின் நிறைக்குச் சமனாகும். தட்டில் வேறுவேறான நிறைகளை வைத்து இப்பரிசோதனையைத் திரும்பவும் செய்க. சேர்த்த நிறை (தாஙகப்படும் மொத்த நிறை இரட்டிக்கப்படுமாறு) தட்டின் நிறைக்குச சமமாயின் கயிறு விடுவிக்கக்கூடிய ஆழமும் இரட டிக்கப்படும் என்பது காணப்படும். அதாவது ஆழம் இரட்டிக்கப்பட அமுககச் செறிவும் இரட்டிக்கப்படும்.

இதேமாதிரி உள்ளாழ்த்தப்படும் ஆழம் மும்மடி அதிகரிக்கப்படுமாயின், தட்டு ஆழ்தறகு வேண்டிய மொத்த நிறையும் மும்மடி அதிகரிக்கப்படும, பிறவும் இவ்வாறே. ஆகவே அமுக்கச் செறிவு ஆழததிற்கு விகிசமத மாகும்.

உதாரணம் 1. தூய நீரில் 20 அடி ஆழத்திலுள்ள அமுக்கச் செறிவைக் காண்க.

ஈறறுப் பிரிவிலிருந்து,

20 அடி ஆழத்தில் அமுக்கம் = வளிமண்டல அமுக்கம் $+\rho.20$.

வளிமண்டல அமுக்கம் சதுர அங்குலத்திற்கு 14.7 இரு. நிறை எனவும் நீரின அடர்த்தி ஒரு கன அடிக்கு 62·5 இரு. எனவும் எடுத்துக்கொண்டு 20 அடி ஆழத்தில் அமுக்கச் செறிவு = சதுர அங்குலத்திற்கு 14.7 இரு. நிறை
+ சதுரஅடிக்கு 62.5×20 இரு. நிறை.

$$= \text{சதுரஅங்குலததிற்கு } \left(14{\cdot}7+\frac{62{\cdot}5\times 20}{144}\right) \text{ இரு. நிறை}$$

$$= \text{சதுர அங்குலத்திற்கு } 23{\cdot}4 \text{ இரு. நிறை}$$

உதாரணம் 2. தன்னீர்ப்பு 1·024 ஆயுள்ள கடலில் யாது ஆழத்தில் அமுக்கச் செறிவு (சதுர அங்குலத்திற்கு 14.7 இரு. நிறையுள்ள) வளிமண்டல அமுக்கத்தின் இரட்டையாகும்?

ஆழம் l அடி ஆகுக ; ஆயின்

l அடி ஆழத்தில் அமுககச் செறிவு = சதுர அங்குலத்திற்கு 14·7 இரு. நிறை $+\rho l$. இது வளிமண்டல அமுக்கத்தின் இருமடங்காதற்கு

$\rho l = 14{\cdot}7$ இரு. நிறை/சதுர அங்குலம்.

ஆனல் ρ (கடல் நீரின் அடர்த்தி) $=1{\cdot}024\times 62{\cdot}5$ இரு. கன அடிக்கு

$\therefore\ \rho l = 1{\cdot}024\times 62{\cdot}5\times l$ இரு. சதுர அடிக்கு

$$= \frac{1{\cdot}024\times 62{\cdot}5}{144}\times l \text{ இரு. சதுர அங்குலத்திற்கு}$$

ஆகவே $$\frac{1 \cdot 024 \times 62 \cdot 5 \times l}{144} = 14 \cdot 7 ;$$

இது தருவது $l = 33 \cdot 75$ அடி

உதாரணம் 3. ஒரு கிடேச்சிட்ட போத்தல், நீரில் 28 அடி தாழ்த்தப்படும்; கிடேச்சின் விட்டம் $\frac{1}{16}$ அடி. கிடேச்சை உட்செலுத்தத் தூண்டும் விசை யாது?

28 அடி ஆழத்தில அமுக்கச் செறிவு $= 28{,}000$ அவுன்சு நிறை/சதுர அடிக்கு.

கிடேச்சின் விட்டம் $= \frac{1}{16}$ அடி.

அதன் பரப்பளவு $= \frac{22}{7} \times (\frac{1}{32})^2$ சதுர அடி;

கிடேச்சில் விசை $= \frac{22}{7} \times \frac{1}{32} \times \frac{1}{32} \times 28{,}000$ அவுன்சு நிறை,

$= \frac{1375}{16}$ அவுன்சு நிறை $= 85\frac{15}{16}$ அவுன்சு நிறை,

$= 5$ இரு. $5\frac{15}{16}$ அவுனசு நிறை.

18. ஓய்விலுள்ள ஒரு பாரமான திரவத்தின சுயாதீனப் பரப்பு கிடையாகும்

M, N என்பன ஒரு திரவப் பரப்பிலுள்ள A, B என்னும் யாதும் புள்ளிகளுக்கு நிலைகுத்தாய்க் கீழே ஒரு கிடைத தளத்திலுள்ள புள்ளிக ளாகுக; p_M, p_N என்பன முறையே M, N என்பனவற்றில் அமுக்கச் செறிவுகளாகுக (படம்16).

ஆயின் §15 இலிருந்து $p_M = p_N$;

§17 இலிருந்து $p_M = P + \rho . AM$,

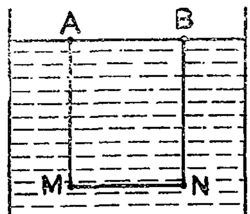
$p_N = P + \rho . BN$,

அதாவது $AM = BN$.

ஆகவே AB யானது MN இற்குச் சமாந் தரமாகும்.

$\therefore$ AB கிடையாகும்.

A, B என்பன பரப்பில் யாதுமிரு புள்ளிக ளாதலால் பரப்பு கிடையாகும்.



படம் 16

19. ஓய்விலுள்ள திரவத்தின் பரப்பு எங்கும் ஒரே மட்டத்திற்கு எழும்

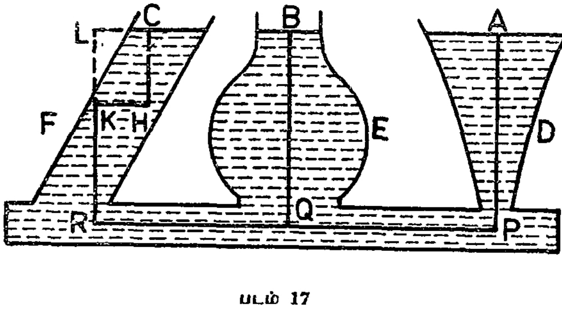
§16 இல் இதனை நாம் உத்தேசிக்கவில்லையெனக் கவனித்தல் முக கியமாகும். அங்கு திரவத்திலுள்ள புள்ளிகளின் அமுக்கச் செறிவு வித்தி யாசத்தை அவாவினோம். இவ்வித்தியாசம் ஒரு புள்ளிக்கும் மற்றைப் புள்ளிக்கூடாக வரையப்படும் ஒரு கிடைக்கோட்டுக்கும் இடையே உள்ள நிலைகுத்துத் தூரத்திற்கு விகிதசமமாகுமெனக் காட்டியுள்ளோம்.

ஆகவே இப்போது நாம் நோக்குவது, அதாவது ஓய்விலுள்ள திரவத்தின் பரப்பு எங்கும் ஒரேமட்டத்திற்கு எழுமென்பது, அக்கணிப்பில் எடுத்துக் கொள்ளப்படவில்லை.

பரிசோதனைமுறை எடுத்துக்காட்டு. படம் 17 இற் காட்டப்படுவதுபோல், ஒன்றோ டொன்று சுயாதீனமாய்த் தொடர்பு கொள்ளும் வேறுவேறான வடிவு களும் பருமன்களுமுள்ள D,E,F என்னுந் திறந்த பாண்டங்களால் ஆக்கப்படும் உபகரணமொன்றை அமைத்தலால் இவ்வியல்பு பரிசோதனை முறையில் சரிபார்க்கப்படலாம். நீர் அல்லது வேறு திரவம் அப்பாண்டங் களுள் ஒன்றில் வார்க்கப்படுமாயின் அது எல்லாவற்றிலும் ஒரே மட்டத் திற்கு எழும்.

D, E என்பனபோன்ற தொடர்பு கொண்ட இரண்டு அல்லது இரண்டின் மேற்பட்ட பாண்டங்களில் திரவம் கொள்ளப்படுமிடத்து §18 இன் **நிறுவல்** உண்மையாகும். இவ்வகையில் எல்லாச் சுயாதீனப் பரப்புக்களும் ஒரே மட்டத்தில் இருப்பதோடு ஒரே கிடைத் தளத்தின் பாகங்களுமாகும். F இற் காட்டப்படுவதுபோன்ற பாண்டத்தில் திரவம் கொள்ளப்படுமாயின் இந் நிறுவல் உண்மையாகாது. ஏனெனின், திரவத்திற்கு வெளியே செல்லாத வாறு பாண்டத்தின் அடியிலுள்ள R என்னும் ஒரு புள்ளியில் அடிகொண்ட ஒரு நிலைக்குத்து நிரலை நாம் அமைக்க முடியாது.

ஆனால் R என்னும் யாதுமொரு புள்ளியைப் பரப்போடு CH, HK, KR என்னும் கோணல் மாணலான நேர்கோடுகளால் எப்போதும் நாம் தொடுக்கலாம். தொடுத்துக்கொண்டு இக் கோடுகளில் யாதுமிரு புள்ளி களின் அமுக்கச் செறிவு வித்தியாசத்தை §16 இல் நாம் கண்டதுபோற் காணலாம்.



படம் 17

CH நிலைக்குத்தாகையால்,

$$H \text{ இல் அமுக்கச் செறிவு} = \rho \times CH \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

இங்கு ρ என்பது அலகுக் கனவளவுடைய திரவத்தின் நிறை.

KH கிடையாதலால்,

K யில் அமுக்கச் செறிவு $-$ H இல் அமுக்கச் செறிவு $=0$ . . . . . (ii)

KR ஆனது நிலைக்குத்தாகையால்,

R இல் அமுக்கச் செறிவு $-$ K இல் அமுக்கச் செறிவு $=\rho\times$KR . . . . (iii)

ஆகவே (i), (ii), (iii) என்பனவற்றைக் கூட்டுதலால்

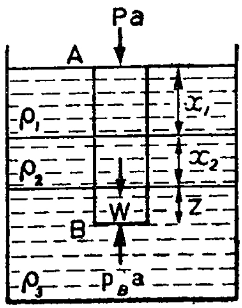
R இல் அமுக்கச் செறிவு $=\rho\times$(CH + KR)

$=\rho\times$ பரப்பின்கீழ் R இன் ஆழம்.

இனி F எனனும் பாண்டத்திலுள்ள திரவம் D யிலுள்ள அதே மட்டத்தை அடையுமென நாம் காட்டலாம். இதற்குக் காரணம், R ஆனது P யோடு ஒரே மட்டமாகுமிடத்து R, P என்பனவற்றில் அமுக்கங்கள் சமமாதலால் C யிலுள்ள பரப்பின்கீழ் R இன் ஆழம் A யிலுள்ள பரப்பின்கீழ் P யின் ஆழத்திற்குச் சமமாகும். ஆகவே AC கிடையாகும்.

20. ஒரு திரவத்தின் மேல் அதனோடு கலவாத வேறு திரவங்கள் இடப்படுமிடத்து அத்திரவத்தில் யாதும் ஆழத்திலுள்ள அமுக்கச் செறிவைக் காணல்

§16 இலுள்ளது போன்று ஒரு திரவ நிரலின் சமநிலையைப் பரிசோதிக்கும் அதே முறையை நாம் கைக்கொள்ளலாம். படம் 18 இற் காட்டப்படுவதுபோல் கன அங்குலத்திற்கு ρ_1, ρ_2, ρ_3 இரு. அடர்த்திகளுள்ள மூன்று திரவங்கள் எம்மிடமுண்டு என உத்தேசிக்க. a சதுர அங்குலக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவுள்ள AB என்னும் நிலைக்குத்துத் திரவ உருளையின் சமநிலையை எடுத்து நோக்குக. முன்போல எல்லா விசைகளையும் நிலைக்குத்தாய்த் துணிக்க



படம் 18

$p_B a = \text{P}a + \text{W}$ . . . . (i)

எனப் பெறுவோம். இங்கு p_B ஆனது சதுர அங்குலத்திற்கு இருத்தல் நிறையில் B யிலுள்ள அமுக்கச் செறிவும், P யானது சதுர அங்குலத்திற்கு இருத்தல் நிறையில் வளிமண்டல அமுக்கமும், W வானது இருத்தல் நிறையில் திரவ உருளையின் மொத்த நிறையும் ஆகும். மேலேயுள்ள இரு திரவப் படைகளின் தடிப்பு x_1 அங்குலமும் x_2 அங்குலமுமாயின், B என்னும் புள்ளி மிகத் தாழ்ந்த திரவப்பரப்பின் கீழ் z அங்குலத்திலிருக்குமிடத்து

$$\text{W} = ax_1\rho_1 + ax_2\rho_2 + az\rho_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

ஏனெனின், மிகமேலான திரவத்திலுள்ள உருளைப் பாகத்தின் கனவளவு ax_1 கன அங்குலமாதலால் அதன் திணிவு $ax_1\rho_1$ இருத்தலும், அதன் நிறை $ax_1\rho_1$ இருத்தல் நிறையுமாகும்; இவ்வாறே உருளையின் எஞ்சிய பாகங்களுக்கும்.

(ii) இன் முடிபை (i) இற் பிரதியிட

$$p_B a = Pa + a(x_1\rho_1 + x_2\rho_2 + z\rho_3),$$

அல்லது $$p_B = P + x_1\rho_1 + x_2\rho_2 + z\rho_3.$$

இது B என்னும் புள்ளியில் அமுக்கச் செறிவைத் தரும்.

கன அங்குலத்திற்கு இருத்தலில் ρ_1, ρ_2, ρ_3 ....அடர்த்திகளும், அங்குலத்தில் முறையே $x_1, x_2, x_3,$ ...... தடிப்புகளுமுள்ள யாதுமொரு தொகை திரவங்கள் உண்டெனின் மிகத் தாழ்ந்த திரவத்தின் B என்னும் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் அமுக்கச் செறிவு

$$p_B = P + \Sigma x_r \rho_r$$

என்பதாலே தரப்படும்.

21. ஏகவினமல்லாத ஒரு பாரமான திரவத்தில் யாதும் ஆழத்தில் அமுக்கச் செறிவைக் காணல்

அடர்த்தியானது ஆழத்தோடு எவ்வாறு மாறுமெனத் தெரியுமாயின், நுண்கணிதத்தில் சொற்ப அறிவு உள்ள மாணுக்கருக்கு இது ஈற்றுப் பிரிவின் மிக எளியதும் அறிவு ஊட்டக்கூடியதுமான ஒரு விரிவாகும். a சதுர அங்குலக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு உள்ள நிலைக்குத்துத் திரவ உருளையை எடுத்து நோக்குக. z அங்குல ஆழத்தில் δz தடிப்புள்ள இவ்வுருளையின் சிறு மூலகத்தின் சமநிலையைப் பரிசோதிக்க (படம் 19).

z ஆழத்தில் அமுக்கச் செறிவு சதுர அங்குலத்திற்கு p இரு. நிறையும், $z+\delta z$ ஆழத்தில் அமுக்கச் செறிவு $p+\delta p$ இரு. நிறையுமாகுக. மூலகத்தின் நிறை $\rho . a\delta z$ ஆதலால் முன்போல விசைகளை நிலைக்குத்தாய்த் துணிக்க,

$$(p+\delta p)\,a = pa + \rho a \delta z,$$

அல்லது $$\delta p = \rho \delta z$$

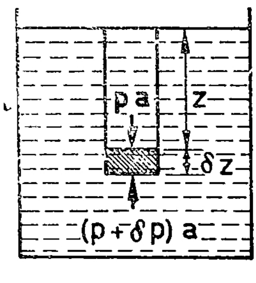
எனப் பெறுவோம்.

$$\therefore \frac{\delta p}{\delta z} = \rho;$$

எல்லைப்படும் வகையில்

$$\frac{dp}{dz} = \rho \text{ ஆதலால்}$$

$$p = \int \rho dz + \text{மாறிலி}$$



படம் 19

இம்மாறிலி $z=0$ ஆகுமிடத்து, அதாவது சுயாதீனப் பரப்பில், அமுக்கச் செறிவாதலால் வளிமண்டல அமுக்கமாகிய P யாகும்.

ஆகவே, $$p = \mathrm{P} + \int \rho dz;$$

இங்கு தொகையிடல் பூச்சியத்திலிருந்து அமுக்கச் செறிவு வேண்டிய z இன் பெறுமானத்திற்கு விரியும்.

உதாரணம் 1. தன் பரப்பின் கீழ் z ஆழத்தில் கன அங்குலத்திற்கு $\frac{1}{4}z$ இருத்தல் அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தில் 1 அடி ஆழத்தில் அமுக்கச் செறிவைத் துணிதல்.

வேண்டிய அமுக்கச் செறிவு சதுர அங்குலத்திற்கு p இரு. நிறையாயின்

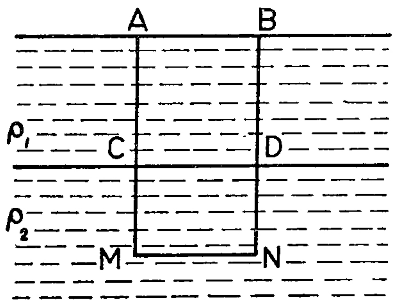
$$\begin{aligned} p &= \mathrm{P} + \int_0^{12} \rho dz, \\ &= \mathrm{P} + \int_0^{12} \tfrac{1}{4} z dz \\ &= \mathrm{P} + \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{z^2}{2}\right]_0^{12} \\ &= \mathrm{P} + \frac{144}{8} \cdot \end{aligned}$$

P யானது சதுர அங்குலத்திற்கு 14·7 இரு. நிறையெனக் கொள்ளுமிடத்து

$p = (14 \cdot 7 + 18)$ இரு. நிறை / சதுர அங்குலம்,

$= 32 \cdot 7$ இரு. நிறை / சதுர அங்குலம்.

22. இரண்டு பாரமான ஏகவினத் திரவங்கள் ஒன்றேடொன்று கலக்காவாயின் அவற்றின் பொதுப் பரப்பு ஒரு கிடைத்தளமாகும்.



படம் 20

பரப்பிலுள்ள A, B என்னும் புள்ளிகளுக்கு நிலைக்குத்தாய்க் கீழே முறையே M, N என்பன கீழ்த் திரவத்தில் ஒரு கிடைக் கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளும் C, D என்பன பொதுப் பரப்பிலுள்ள புள்ளிகளுமாகுக (படம் 20).

ஆயின் §15 இலிருந்து

M இல் அமுக்கச் செறிவு = N இல் அமுக்கச் செறிவு,

அதாவது (§20 இலிருந்து),

$$P+\rho_1.AC+\rho_2.CM=P+\rho_1.BD+\rho_2.DN.$$

CM = AM − AC, DN = BN − BD எனப் பிரதியிட இது தருவது

$$\rho_1.AC+\rho_2(AM-AC)=\rho_1.BD+\rho_2(BN-BD),$$

அதாவது $(\rho_1-\rho_2)\,AC+\rho_2.AM=(\rho_1-\rho_2)\,BD+\rho_2.BN$ ....(i).

இனி MN கிடையாகும் (தரப்படும்) ; AB என்பதும் கிடையாகும் (§ 18).

$$\therefore\ AM=BN.$$

∴ (i) என்பது $(\rho_1-\rho_2)\,AC=(\rho_1-\rho_2)\,BD$ ஆகும்.

∴ $\rho_1=\rho_2$ அல்லது AC = BD ஆகவேண்டும்.

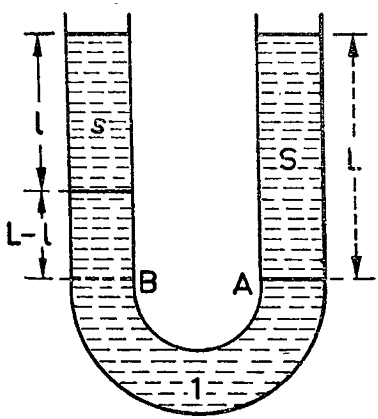
திரவங்கள் வேறுவேறான அடர்த்திகள் உடையனவாதலால் ρ_1 என்பது ρ_2 என்பதற்குச் சமனாகாது.

∴ AC = BD.

∴ CD யானது AB என்பதற்குச் சமாந்தரமாகும்.

∴ CD கிடையாகும்.

உதாரணம் 1. இரு முனைகளிலுந் திறந்த சீரான துவாரமுள்ள கண்ணடிக் குழாய் U என்னும் எழுத்து வடிவத்திற்கு வளைக்கப்பட்டுத் தூய நீரைக் கொள்ளும். ஒரு கிளைக்குள் l அடி நீளத்திற்கு s தன்னீர்ப்புள்ள திரவம் வார்க்கப்பட்டு, இரு கிளைகளுக்குள்ளும் திரவமட்டம் ஒரேயளவினதாகுமாறு S தன்னீர்ப்புள்ள திரவம் மற்றைக் கிளைக்குள் வார்க்கப்படும். இரண்டாங் கிளைக்குள் உள்ள திரவத்தின் நீளத்தைக் (L அடி) காணல்.



படம் 21

படம் 21 இல் A என்பது, நீரினதும் S தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தினதும் பொதுப் பரப்பில் உள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. B யானது A யோடு ஒரே கிடையில் மற்றைக் குழாயிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியாயின்

A யில் அமுக்கச் செறிவு = B இல் அமுக்கச் செறிவு.

A யில் திரவத்தால் மட்டும் ஆய அமுக்கச் செறிவு

$L\times S\times 62\frac{1}{2}$ இரு. நிறை/சதுர அடி

ஆக, B யில் அது

$$l\times s\times 62\tfrac{1}{2}+(\mathrm{L}-l)\times 1\times 62\tfrac{1}{2} \text{ இரு. நிறை/சதுர அடி ஆகும்.}$$

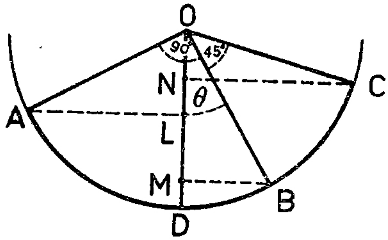
$$\therefore\ \mathrm{LS}=ls+(\mathrm{L}-l)\ ;$$

$$\therefore\ l\,(1-s)=\mathrm{L}\,(1-\mathrm{S})\ ;$$

$$\therefore\ \mathrm{L}=\frac{1-s}{1-\mathrm{S}}\,l \text{ அடி.}$$

உதாரணம் 2. சீரான குறுக்குவெட்டுள்ள ஒரொடுங்கிய வட்டக் குழாய் அரைவட்ட வடிவத்தில் ஆக்கப்பட்டு அதன் திறந்த முனைகள் மிகலோகுமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஏற்றப்படும். இக்குழாய் ஒன்றோடொன்று கலவாத இரு திரவங்களைக் கொள்ளும். ஒன்றின் அடர்த்தி மற்றையதின் இரு மடங்காகும். கூடுதலான அடர்த்தியுடைய திரவம் 90° கோணத்தையும், மற்றையது 45° கோணத்தையும் எதிரமைக்குமாயின் பொதுப் பரப்புக்கூடாகவுள்ள ஆரை நிலைக்குத்தோடு ஆக்குங் கோணத்தைக் காண்க.

ஒரு திரவத்தின் அடர்த்தி கன அடிக்கு ρ இரு. ஆகுக ; ஆயின் மற்றைத் திரவத்தின் அடர்த்தி கன அடிக்கு 2ρ இரு. ஆகும். படம் 22 ஐப் பார்க்க.



படம் 22

AB, BC என்பன முறையே 2ρ, ρ என்னும் அடர்த்திகளுள்ள திரவ நிரல்களாகுக. D யானது அரை வட்டத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியாகுக. D யை வட்டத்தின் மையத்திற்குத் (O) தொடுத்து A, B, C என்பனவற்றிலிருந்து OD யிற்கு அதனை முறையே L, M, N என்பனவற்றிற் சந்திக்குமாறு செங்குத்துக்கள் வரைக. வேண்டிய கோணம் அதாவது $\angle$BOD θ ஆகுக. $\mathrm{LD}=x$, $\mathrm{MD}=y$, $\mathrm{ND}=z$ என எழுதுக. D யில் AD என்னுந் திரவத்தாலாய அமுக்கச் செறிவு $2\rho.\mathrm{LD}$ அல்லது $2\rho x$ ஆகும். அன்றியும் D யில் BC, BD என்னுந் திரவங்களாலாய அமுக்கச் செறிவு

$$2\rho.\mathrm{MD}+\rho.\mathrm{NM}$$

$$=2\rho y+\rho\,(z-y).$$

இவ்வமுக்கச் செறிவுகள் சமமாதலால்

$$2\rho x=2\rho y+\rho\,(z-y),$$

அல்லது $$2x=2y+z-y\,,$$

அல்லது $$2x=y+z \qquad \text{(i).}$$

உருவத்தின் கேத்திர கணிதத்திலிருந்து r என்பது வட்டத்தின் ஆரை யாயின்

$$x = \mathrm{LD} = \mathrm{OD} - \mathrm{OL}$$
$$= r - r \text{ கோசை } (90 - \theta)$$
$$= r - r \text{ சைன் } \theta$$
$$y = \mathrm{MD} = \mathrm{OD} - \mathrm{OM}$$
$$= r - r \text{ கோசை } \theta,$$
$$z = \mathrm{ND} = \mathrm{OD} - \mathrm{ON}$$
$$= r - r \text{ கோசை } (45 + \theta).$$

x, y, z என்பனவற்றின் இப்பெறுமானங்களை (i) இற பிரதியிட

$$2r - 2r \text{ சைன் } \theta = r - r \text{ கோசை } \theta + r - r \text{ கோசை } (45 + \theta)$$

$$\therefore\ 2 \text{ சைன் } \theta - \text{கோசை } \theta = \text{கோசை } (45 + \theta)$$
$$= \text{கோசை } \theta \text{ கோசை } 45 - \text{சைன } \theta \text{ சைன் } 45$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{கோசை } \theta - \text{சைன் } \theta):$$

$$\therefore\ 2\sqrt{2} \text{ சைன } \theta - \sqrt{2} \text{ கோசை } \theta = \text{கோசை } \theta - \text{சைன் } \theta\ ,$$

அதாவது, $\text{சைன் } \theta\ (1 + 2\sqrt{2}) = \text{கோசை } \theta\ (1 + \sqrt{2})$

$$\therefore\ \text{தான் } \theta = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} = 0{\cdot}63$$

ஆகவே $\theta = 32^\circ\ 13'$.

பயிற்சி III

1. 1 அங்குல விட்டமுள்ள ஒரு நீண்ட கண்ணுடிக குழாயின ஒரு முனையில 2 அவுன்ச நிறையுடைய ஒரு தட்டு வைககபபட்டுளளது. குழாய் முனையின கீழ் தட்டு இருககு மாறும, அது விழாதவாறு நீரின் கீழ் குழாயின் முனை எவ்வளவு தூரம் உளளாழத் தபபட வேணடும.

2. ஒரு நீரமுழகி முககுளிப்பவன 5 வளிமண்டல அமுக்கததைத் தாஙகமுடியுமாயின; கடல நீரில அவன வேலை செயயககூடிய மிகப்பெரிய ஆழத்தை பதமில துணிக ; ஒரு வளிமணடலம சதுர அங்குலத்திற்கு 15 இரு. அமுககமெனவும, ஒரு கன அடி கடல் நீர் 64 இருத்தல் எனவும் எடுக்க.

3. நீரகோட்டிலிருந்து 20 அடி கீழாக ஒரு கப்பலினடியில 6 அங்குலச சதுரத் துளை ஒன்று ஆககப்படும். ஒரு கன அடி நீர் 64 இருததல் நிறையாயின், துளையில் ஒரு மரத் துண்டை வைதது நீா உட்செல்லலைத் தடுத்தற்கு என்ன விசை உளுற்றப்பட வேண்டும்.

4. s தன்னீரபபுள்ள திரவத்தின் பரப்பில் P என்னும அமுக்கம் உண்டெனின z ஆழத்தில அமுககத்தைக காண்க.

5. ஒரு திரவத்தில், சதுர அங்குலத்திற்கு $13\frac{8}{9}$ இரு. நிறையுள்ள ஒரு வெளியமுக்கத்தின் விளைவை அத்திரவத்தில் 32 அடி. தடிப்பான நீர்ப்படையொன்றைப் பொருத்தலால் உண்டுபண்ணலாம் எனக் காட்டுக.

6. ஒரு பாரமான பாயியினது பரப்பின் கீழ் 3 அடி ஆழத்தில் அமுக்கச் செறிவு சதுர அங்குலத்திற்கு 30 இரு. நிறையாகும் ; 7 அடி ஆழத்தில் அது 50 இரு. நிறையாகும். பரப்பில் அமுக்கச் செறிவு என்ன?

7. கிடையான அடியையுடைய ஒரு பாண்டம் 20 அங்குல ஆழத்திற்கு இரசத்தைக் கொள்ளும் ; இரசத்தின்மேல் 16 அங்குல ஆழத்திற்கு நீர் மிதக்கும். இரசத்தின் தன்னீர்ப்பு 13·6 ஆயின் பாண்டத்தின் அடியில் சதுர அங்குலத்திற்கு இரு. நிறையில் அமுக்கச் செறிவைக் காண்க. வளிமண்டல அமுக்கத்தைப் புறக்கணிக்க.

8. 14 சமீ. ஆரையும் 40 சமீ. உயரமும் உள்ள ஒரு வட்ட உருளையின் அரைப் பாகம் நீராலும் அரைப்பாகம் 0·9 தன்னீர்ப்புள்ள எண்ணெயாலும் நிரப்பப்படும். அடியில் உதைப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என எடுக்க).

9. ஒரு சீரான கூனைக்குழாயின் இரு கிளைகள் நேராகவும் நிலைக்குத்தாகவும் உள்ளன. அவற்றைத் தொடுக்கும் குழாய்ப்பாகம் கிடையாக உள்ளது. குழாயின் 6 அங்குலத்தை நிரப்புதற்குப் போதிய நீர் குழாய்க்குள் வார்க்கப்பட்ட பின்னர், 5 அங்குலம் நிரப்புதற்குப் போதிய எண்ணெய் ஒரு முனையில் வார்க்கப்படும். எண்ணெயின் தன்னீர்ப்பு நீரினுடைய தன்னீர்ப்பின் ஐந்தில் நாலு பங்காகும். குழாயின் கிடைப் பாகம் 2 அங்குல நீளமாயின் பாயிகள் சமநிலையிலிருக்குமிடத்து அவற்றின் நிலையைக் காண்க.

10. ஒரு U – குழாய் அதன் உச்சியிலிருந்து 5 அங்குலம் வரை 13·5 தன்னீர்ப்புடைய இரசத்தைக் கொள்ளும். ஒரு கிளையை நிரப்புதற்கு வார்க்கவேண்டிய நீர் நிரலின் உயரத்தைக் காண்க.

11. 8 அங்குல நீளக் கால்களுடைய U – குழாய்க்குள் அவற்றின் அரைப்பாகம் நிரம்பும் வரை நீர் வார்க்கப்படும். அதன் பின்னர் ஒரு காலுக்குள் வார்க்கத்தக்க அளவு எண்ணெய் வார்க்கப்படும். எண்ணெயின் நிறை நீர் நிறையின் மூன்றில் இரண்டு பங்காயின் குழாயின் என்ன நீளத்தை எண்ணெய் இடங்கொள்ளும்?

12. ஒன்றோடொன்று கலவாத இரு திரவங்களைச் சமகனவளவிற் கொள்ளும் ஒரு கூனைக் குழாய், ஒன்றோடொன்று 60° கோணச் சாய்வுள்ள இரு கிளைகளால் ஆக்கப்படும். ஒரு கிளையை நிலைக்குத்தாய்ப் பிடிக்குமிடத்து இரு திரவங்களும் குழாய்க் கோணத்திற் சந்திக்கும். இரு கிளைகளும் நிலைக்குத்தோடு சமசாய்வு கொள்ளுமாறு குழாய் பிடிக்கப்படுமாயின் முன்னர் நிலைக்குத்தோடு சாய்வாயிருந்த கிளையிற் கொள்ளப்பட்ட திரவத்தின் காற்பங்கு முன்னர் நிலைக்குத்தாயிருந்த கிளைக்குட் பாயுமெனக் காட்டுக.

13. ஒரு நீர்த்தாங்கி, ஒவ்வொன்றும் h அங்குலத் தடிப்புள்ள n திரவப் படைகளைக் கொள்ளும். மிகமேலான படையின் அடர்த்தி கன அங்குலத்திற்கு ρ இருத்தலும், அடுத்தடுத்து வரும் படைகள் முறையே 2ρ, 3ρ, ... அடர்த்தியும் உடையன. அடியில் திரவங்களாலாய அமுக்கச் செறிவைக் காண்க.

14. ρ, 2ρ, 3ρ, ..., 10ρ அடர்த்திகளுள்ள பத்துத் திரவங்கள் ஒன்றுக்கு மேல் ஒன்று இடப்படும். மிகமேலான படையின் தடிப்பு h அங்குலமும் அடுத்தது $2h$ அங்குலமும் அடுத்தது $3h$ அங்குலமும் பிறவும் இவ்வாறேயாகி மிகத் தாழ்ந்த படையின் தடிப்பு $10h$ அங்குலமாகும். மிகத் தாழ்ந்த திரவத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் திரவங்களாலாய அமுக்கச் செறிவைக் காண்க.

15. ஒரு பலவினப் பாயியில் z அங்குல ஆழத்தில் அடர்த்தி கன அங்குலத்திற்கு kz இரு. ஆகும். 2 அடி ஆழத்தில் அமுக்கச் செறிவு சதுர அங்குலத்திற்கு 40 இரு. நிறையாயின், k என்பதைக் காண்க. வளிமண்டல அமுக்கம் சதுர அங்குலத்திற்கு 14·7 இரு நிறை என எடுக்க.

16. தனது தளம் நிலைக்குத்தாய் நிறுத்தப்பட்ட ஒரு மெல்லிய வட்டக் குழாய் ஒன்றோடொன்று கலவாத இரு திரவங்களைக் கொள்ளும். ஒவ்வொரு திரவமும் வட்டத்தினுடைய மையத்தில் ஒரு செங்கோணத்தை எதிரமைக்கும்; ஆனால் அவை ρ_1, ρ_2, ($\rho_1 < \rho_2$) என்னும் வேறுவேறான அடர்த்திகளுடையன. அவற்றின் சந்திப்புக்கூடாகச் செல்லும் ஆரை நிலைக்குத்தோடு ஆக்குங் கோணத்தைக் காண்க.

17. நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிறுத்தப்படும் ஒரு வட்டக் குழாய் ρ, σ என்னும் அடர்த்திகளுள்ள இரு திரவ நிரல்களைக் கொள்ளும்; இந்நிரல்கள் முறையே 2θ, 2ϕ என்னுங் கோணங்களை வட்டத்தினுடைய மையத்தில் எதிரமைக்கும். பொதுப் பரப்புக் கூடாகவுள்ள விட்டம் நிலைக்குத்தோடு ஆக்கும் α என்னுங் கோணம்.

$$\rho \text{ சைன் } \theta \text{ சைன் } (\theta \pm \alpha) = \sigma \text{ சைன் } \phi \text{ சைன் } (\phi \mp \alpha)$$

என்பதாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக. குறிப்பிட்ட வகையாகத் திரவங்களின் சம கனவளவுகள் சரியாய்க் குழாயின் அரைப்பங்கை நிரப்புமாயின் α வைக் காண்க.

விடை

1. 4·4 அங்.
2. $22\frac{1}{2}$ பதம்.
3. 320 இரு. நிறை.
4. $P + zsw$; w வானது நியம பதார்த்தத்தினது அலகுக் கனவளவின் நிறை.
6. 15 இரு. நிறை/சதுர அங்.
7. $10\frac{5}{12}$ இரு. நிறை/சதுர அங்.
8. 23·408 கிலோ கிராம்.
9. பொதுப் பரப்பு நீர்ப்பரப்பின் கீழ் 4 அங்குலமும், எண்ணெய்ப் பரப்பின் கீழ் 5 அங்குலமும்.
10. $5\frac{5}{26}$ அங்.
11. 6 அங்.
13. $55\rho h$ இரு. நிறை/சதுர அங்குலம்.
14. $385\rho h$ இரு. நிறை/சதுர அங்குலம்.
15. 0·088.
16. தான் $^{-1}\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\right)$.
17. தான் $^{-1}\left(\frac{\rho - \sigma}{\rho + \sigma}\right)$.

அதிகாரம் IV

பாரமான பாயிகளின் அமுக்கம் (2)

தளப்பரப்பளவுகளில் மொத்த உதைப்பு

23. முன்னுரை

ஈற்றதிகாரத்தில் ஒரு பாயியிக்குள் அல்லது ஒன்றேடொன்று கலக்காத ஒரு தொகை பாயிகளுக்குள் உள்ள பல்வேறு புள்ளிகளில் அமுக்கச் செறிவு பற்றிக் கவனித்தோம். வேறு வேருன புள்ளிகளில் அமுக்கச் செறிவு பற்றிய பல்வேறு தேற்றங்களை எடுத்து நோக்கினேம். இவ்வாறு பெற்ற அறிவு ஒரு பாயியில் உள்ளாழ்த்தப்படும் தளப்பரப்பளவில் ஆகும் மொத்த அமுக்கத்தை அல்லது (பலமுறையுங் கூறப்படுவதுபோல்) மொத்த உதைப்பைக் காண்பதற்குப் பிரயோகிக்கப்படலாம். இது செய்முறையில் மிக முக்கியமானது என்பது கண்கூடு.

ஒரு பாயி ஒரு தளப்பரப்பளவோடு தொடுகை கொள்ளுமிடத்து பாயியின் ஒவ்வொரு பாகமும் பரப்பளவின்மீது அதற்குச் செங்கோணங்களில் ஒரு விசையை உஞற்றும் என்பது எமககு முன்னரே தெரியும் (§ 4). இச்சமாந்தர விசைகளின் கூட்டுத்தொகையை நாம் மொத்த உதைப்பு என்பதாற் குறிப்போம். இச்சமாந்தர விசைகளின் கூட்டுததொகையை ஒரு ஒன்றி விசையாற்—விளையுள் உதைப்பாற்—குறிப்பது பலமுறையும் இசைவாகும் ; இவவிசையின் பருமன் பரப்பளவிலுள்ள மொத்த உதைப்பு அல்லது மொத்த அமுக்கம் ஆகவேண்டும். இவ்விளையுள் உதைப்பின் திசை பரப்பளவுக்குச் செவ்வனகுமென்பது எமக்குத் தெரியும், ஏனெனின் ஒருதொகை சமாந்தர விசைகளின் விளையுள் அவ்விசைகளுக்குச் சமாந்தரமாகும். விளையுள் உதைப்பு பரப்பளவிலே தாக்குமிடம் எமக்குத் தெரியும் வரை அது முற்றுய்க் குறிக்கப்படமாட்டாது. இது **அமுக்க மையமெனக்** கூறப்படும் ஒரு முக்கியமான புள்ளியாகும். பல்வேறு வகைகளில் இப்புள்ளியின் துணிபை அதிகாரம் V இற்கு விடுவோம். இவ்வதிகாரத்தில் மொத்த உதைப்பின பருமனைப்பற்றியே அவாவுவோம் ; மிக எளிய வகையை எடுத்துத் தொடங்குவோம்.

24. கிடையான தளப் பரப்பளவுகளில் மொத்த உதைப்பு

ஒரு திரவத்தில் கிடைத் தளத்திலுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் அமுக்கச் செறிவு மாருதென § 15 இல் கண்டுள்ளோம். ஆகவே இவ்வகையில் மொத்த உதைப்பானது தளவுருவத்தின் ஆழத்திலுள்ள அமுக்கச் செறிவைப் பரப்பளவாற் பெருக்குதலாற் பெறப்படும்.

உதாரணம் 1. **12 அடி $\times$ 4 அடி அளவுகளுள்ள அடியைக் கொண்ட ஒரு செவ்வக நீர்த்தாங்கி 5 அடி ஆழத்திற்குத் (1·9 தன்னீர்ப்புள்ள) ஒரு திரவத்தைக் கொள்ளும். அடியில் மொத்தத் திரவ அமுக்கத்தைக் காணல்.**

அடியில் திரவத்தாலாய அமுக்கச் செறிவு

$$=1{\cdot}9\times 62{\cdot}5\times 5 \text{ இரு. நிறை / சதுர அடி.}$$

அடியின் பரப்பளவு 4×12 *சதுர அடி. ஆகவே அடியில் மொத்த உதைப்பு*

$$=4\times 12\times 1{\cdot}9\times 62{\cdot}5\times 5 \text{ இரு. நிறை}$$

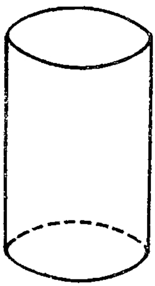
$$=\frac{4\times 12\times 1{\cdot}9\times 62{\cdot}5\times 5}{2240} \text{ தொன் நிறை.}$$

$$=127{\cdot}23 \text{ தொன் நிறை.}$$

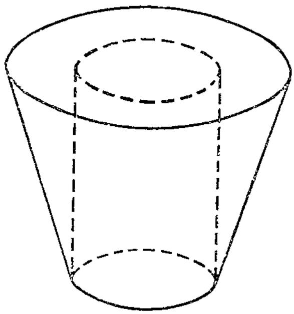
இங்கும் பின்வரும் வகைகளிலும் திரவத்தின் நிறையால் மட்டும் ஆய உதைப்பை அவாவுகிறோமென்பதும், வளிமண்டல அமுக்கத்தை விலக்குகிறோமென்பதும் கவனிக்கப்படவேண்டும்.

25. தந்த ஆழமுள்ள திரவத்தால் அதனைக் கொள்ளும் பாண்டத்தின் அடியில் உஞற்றப்படும் மொத்த உதைப்பு பாண்டத்தின் எஞ்சிய பாகத்தினது வடிவைச் சாராது.

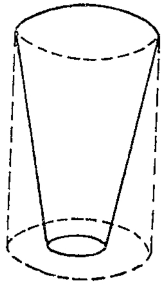
இது § 17 இல் இருந்து பெறப்படும் ; ஏனெனின், அடியில் யாதுமொரு புள்ளியில் அமுக்கச செறிவானது, கொள்ளும் பாண்டத்தின் மற்றைப்



படம் 23



படம் 24



படம் 25

பாகங்களின் வடிவைச் சாராது திரவ ஆழத்தையும் அடர்த்தியையுமே சாரும் ; அடியில் மொத்த உதைப்பு இவ்வமுக்கச் செறிவையும் அடியின் பரப்பளவையுமே சாரும்.

இது முன்னுள்ளதிலிருந்து நேரடியாகப் பெறப்பட்டபோதிலும் இதனைப் பற்றி நுணுக்கமான பரிசீலனை வேண்டப்படுகிறது. பின்வரும் வகைகளை எடுத்து நோக்குக :—

(1) திரவம் ஒரு திறந்த உருளைப் பாண்டத்திற் கொள்ளப்படுமிடத்து (படம் 23) அடியில் கீழ்முகமாக நிலைக்குத்தான உதைப்பையும் வளை பரப்பில் கிடையான உதைப்புக்களையும் திரவம் உஞற்றும். ஆகவே நிலைக் குத்தாகத் துணிக்குமிடத்து

$$\text{அடியில் மொத்த உதைப்பு} = \text{பாயி உருளையின் நிறை.}$$

(2) படம் 24 இல் உள்ளதுபோன்ற வடிவு கொண்ட "பாண்டத்தில்" திரவம் அடியில் ஒரு உதைப்பை உஞற்றுவதோடு வளைபரப்பில் அதற்குச் செங்கோணங்களில் உதைப்புக்களை உஞற்றும் ; இவற்றிற்குக் கீழ்முகமான நிலைக்குத்துக்கூறு உண்டு. ஆகவே நிலைக்குத்தாகத் துணிக்குமிடத்து

$$\text{அடியில் உதைப்பு} + \text{வளைபரப்பில் உதைப்பின கீழ்முகமாகத் துணித்த பகுதி} = \text{கொள்ளப்படும் பாயியின் நிறை.}$$

ஆகவே அடியில் உதைப்பானது கொள்ளப்படும் பாயியின் நிறையிலுஞ் சிறிதாகும்.

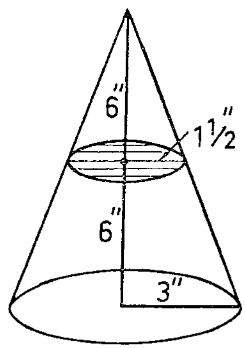
(3) இறுதியாக, பாண்டததின் வடிவு படம் 25 இல் உள்ளது போன் றதாயின், பாண்டத்தின் வளைபரப்பில் பாயியின் உதைப்பு மேல்முகமான கூறு உடையது ; நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க

$$\text{அடியில் உதைப்பு} - \text{வளைபரப்பில் உதைபபின் துணித்த பகுதி} = \text{கொள்ளுப்படும் பாயியின் நிறை ;}$$

ஆகவே அடியில் உதைப்பானது கொள்ளப்படும் பாயி நிறையிலும் பெரி தாகும்.

உண்மையில், இம்மூன்று வகைகளிலும் அடி யின பரப்பளவுகள் ஒரேயளவாகவும் திரவம் ஒரே உயரத்திலும் இருக்குமாயின் அடியில மொத்த உதைப்பு ஒவ்வொரு வகையிலும் ஒரேயளவாகும்.

உதாரணம் 1. **12 அங்குல உயரமும் 3 அங்குல அடி ஆரையும் உள்ள ஒரு பொள்செவ்வட்டக் கூம்பு அதன் உச்சி மிகமேலாகவும் அதன் அடி கிடையாகவும் இருக்கும் நிலையில் ஒரு கன அடிக்கு 64 இருத்தல் நிறைகொண்ட கடல் நீரை 6 அங்குல உயரத்திற்குக் கொள்ளும். அடி யில் மொத்த உதைப்பையும் திரவ நிறையையுங் காண்க.**



படம் 26

படம் 26 கூம்பைக் குறிக்க. ஆயின், h உயரமும் r அடி ஆரையும் உள்ள கூம்பின் கனவளவு $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ஆதலால்

$$\text{கடல் நீரின் கனவளவு} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{12}\right)^2\cdot\frac{12}{12} - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1\frac{1}{2}}{12}\right)^2\cdot\frac{6}{21}\text{ கன அடி.}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{128}\right)\text{ கன அடி.}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\frac{7}{128}\text{ கன அடி.}$$

$$\therefore \text{ திரவத்தின் நிறை} = \frac{1}{3}\pi\frac{7}{128}.64 \text{ இரு. நிறை.}$$

$$= \frac{7\pi}{6}\text{ இரு. நிறை.}$$

$$= 3{\cdot}665 \text{ இரு. நிறை.}$$

$$\text{அடியில் அமுக்கச் செறிவு} = \frac{64\times 6}{12}\text{ இரு. நிறை/சதுர அடி ;}$$

$$\therefore \text{ அடியில் மொத்த உதைப்பு} = \frac{64\times 6}{12}\times\pi\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \text{ இரு. நிறை.}$$

$$= 2\pi \text{ இரு. நிறை.}$$

$$= 6{\cdot}283 \text{ இரு. நிறை.}$$

இது மேலுள்ள (3) ஆம் வகையோடு இசைவாகும். 2·618 இரு. நிறையாகிய இவ்விரு பெறுமானங்களின் வித்தியாசம் திரவத்தால் வளைபரப்பில் உஞற்றப்படும் உதைப்பின் நிலைக்குத்துக்கூறின் அளவாகும். (§ 29 இல் உதாரணம் 3 ஐயும் பார்க்க).

வளைபரப்புகளில் உதைப்புப் பற்றிக் கூடுதலாக விபரமாய் அதிகாரம் VII இல் எடுத்து நோக்குவோம்.

26. ஒரு தளப் பரப்பளவில் ஒரு பாரமான ஏகவினத் திரவத்தின் மொத்த உதைப்பானது பரப்பளவினதும் புவியீர்ப்பு மையத்திலுள்ள அமுக்கச் செறிவினதும் பெருக்கத்திற்குச் சமமாகும்

ஒரு தளப்பரப்பளவினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் (அல்லது மையப் போலியின்) ஆழம் தெரியுமாயின் அல்லது கணிக்கக்கூடுமாயின் அத்தளப் பரப்பளவில் மொத்த உதைப்பைத் துணிதறகு இத்தேற்றம் உதவுமாதலால் இது மிக முக்கியமானது.

LM என்பது பாயியில் உள்ளாழ்த்தப்படும் A சதுர அடி பரப்பளவுள்ள யாதும் ஒரு தள உருவமாகுக (படம் 27) ; a_1 சதுர அடி பரப்பளவுள்ள அதன் சிறு மூலகம் ஒன்று பரப்பின் கீழ் z_1 அடி ஆழத்தில் இருக்க.

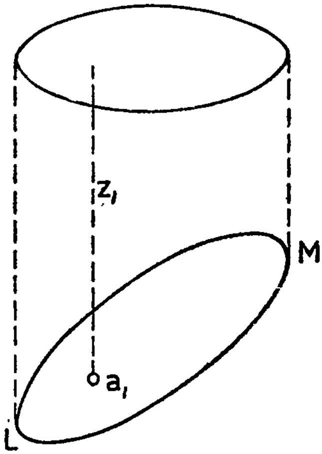
ஆயின் a_1 இல் திரவத்தால் மட்டும் (வளிமண்டல அமுக்கத்தைப் புறக்கணிக்க) ஆய அமுக்கச் செறிவு சதுர அடிக்கு ρz_1 இரு. நிறை யாகும் ; இங்கு ρ வானது கன அடிக்கு இருத்தலில் அடர்த்தியாகும். ஆயின்,

a_1 மூலகத்தில் உதைப்பு $= \rho z_1 a_1$ இரு. நிறை, அண்ணளவாக.

எஞ்சிய பரப்பளவை $z_2, z_3, \ldots, z_n$ என்னும் ஆழங்களிலுள்ள $a_2, a_3, \ldots, a_n$ என்னும் மூலகங்களாகப் பிரிப்போமாயின்,

உருவத்தில் மொத்த உதைப்பு $= \rho z_1 a_1 + \rho z_2 a_2 + \ldots + \rho z_n a_n$ அண்ணளவாக

$= \rho \sum_{r=1}^{n} z_r a_r$ இரு. நிறை அண்ணளவாக ;



படம் 27

$a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n$ ஆனது முழுப் பரப்பளவுக்குச் சமமாதலால் இங்கு கூட்டல் முழுப் பரப்பளவுக்கும் விரியும். இம் மொத்த உதைப்பின் பெறுமானம் அண்ணளவாகுமெண்பதற்குக் காரணம் a_1 என்னும் மூலகப்பரப்பளவெங்கும் அமுக்கச் செறிவு சதுர அடிக்கு ρz_1 இரு. நிறையாகுமெனக் கொள்ளப்பட்டதே. உண்மையில் மூலகப் பரப்பளவின் வேறுவேருன பாகங்கள் வேறுவேருன ஆழங்களிலிருக்கும் ;

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n = \text{முழுப் பரப்பளவு}$$

என்னும் நிபந்தனைக்குட்பட மூலகத் தொகை வரையறையின்றி அதிகரிக்கப்படுமிடத்து, உருவத்தில் மொத்த உதைப்பு செப்பமாய்

$$= \rho z_1 a_1 + \rho z_2 a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \rho z_n a_n \text{ என்பதன் எல்லை ;}$$

அதாவது மூலகத் தொகையை நாம் அதிகரிக்க அதன் விளைவாக ஒவ்வொரு மூலகப் பரப்பளவுங் குறையும். ஆகவே,

$$\text{உருவத்தில் மொத்த உதைப்பு} = \lim_{n\to\infty} \rho \sum_{r=1}^{n} z_r a_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

எனச் செப்பமாய் எழுதலாம்.

நிலையியலில் ஒரு தளப் பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காணுமிடத்து $\sum z_r a_r$ என்னுங் கோவை பெறப்பட்டது (*Tutorial Statics* ப. 221 ஐப்

பார்க்க) $\bar{z}$ ஆனது பரப்பின கீழ் புவியீர்ப்பு மையத்தின் (அல்லது மையப போலியின்) ஆழமாயின்

$$A\bar{z} = \text{எல்லை}_{n\to\infty} (z_1a_1 + z_2a_2 + \dots\dots\dots + z_na_n)$$

$$= \text{எல்லை}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} z_ra_r \text{ ; எனப் பெறுவோம்.}$$

(i) இற பிரதியிட

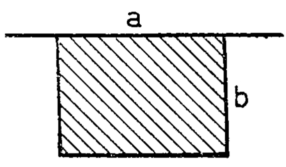
உருவத்தில் மொத்த உதைபபு $= \rho A\bar{z}$ இரு. நிறை.

இங்கு A யானது உருவத்தின பப்பளவும் $\rho\bar{z}$ ஆனது புவியீர்ப்பு மையத்தில் அமுக்கச் செறிவும் ஆகும். ஆதலால், தேற்றம் நிறுவப்படும.

27. பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் எளிய கேத்திரகணித உருவங்களில் மொத்த உதைப்பு

எளிய கேத்திரகணித வடிவுகளில் மொத்த உதைப்பைத் துணிதற்கு ஈற்றுப் பிரிவின் தேறறத்தை நாம் இப்போது பிரயோகிப்போம். ஒவ்வொரு வகையிலும் உருவம் பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் போதே உதைபபை ஆராய்வோம்.

(1) ஓரம் ஒன்று பரப்பிலுள்ள செவ்வகம்.



படம் 28

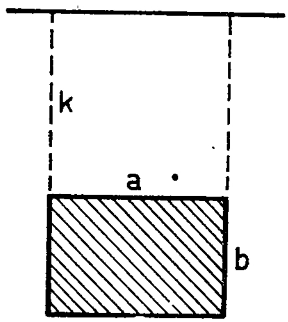
பக்கங்கள் a, b எனபனவாகுக.

உருவத்தின் பரப்பளவு $= ab$.

பரபபின் கீழ் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $= \frac{b}{2}$;

$\therefore$ மொதத உதைப்பு $= \rho . ab . \frac{b}{2} = \frac{1}{2}\rho ab^2$.

(2) மேலோரம் k ஆழத்தில் கிடையாகவுள்ள செவ்வகம்.



படம் 29

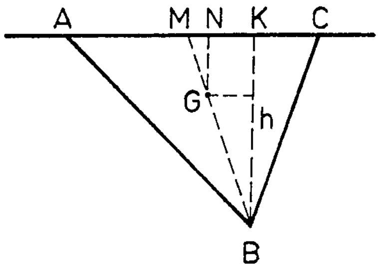
$$\text{உருவத்தின் பரப்பளவு} = ab.$$

$$\text{புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம்} = k + \frac{b}{2};$$

$$\therefore\ \text{மொத்த உதைப்பு} = \rho ab\left(k + \frac{b}{2}\right).$$

(3) ஒரு ஓரம் பரப்பிலுள்ள முக்கோணி.

ABC என்பது $AC = a$ ஆகவுள்ள முக்கோணியாகுக ; $BK = h$ என்னுங் குத்துயரம் ஆகுக. M எனபது AC யின நடுப்புள்ளியாயின் $GM = \frac{1}{3}BM$ (*Tutorial Statics* ப. 216 ஐப பார்கக) ஆகுமாறு G யானது முக்கோணியின் புவியீர்ப்பு மையமாகும்.



படம் 30

ஆகவே இயல்பொத்த முக்கோணிகளால்

$$GN = \frac{1}{3}BK$$
$$= \frac{1}{3}h;$$

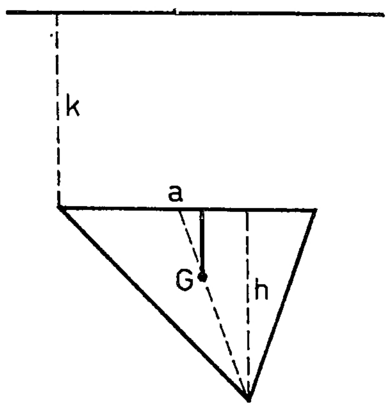
GN, புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழமாகும்.

$$\text{முக்கோணியின் பரப்பளவு} = \tfrac{1}{2}ah.$$

$$\text{முக்கோணியில் மொத்த உதைப்பு} = \rho.\tfrac{1}{2}ah.\tfrac{1}{3}h$$

$$= \tfrac{1}{6}\rho ah^2.$$

(4) மேலோரம் k ஆழத்தில் கிடையாகவுள்ள முக்கோணி.



படம் 31

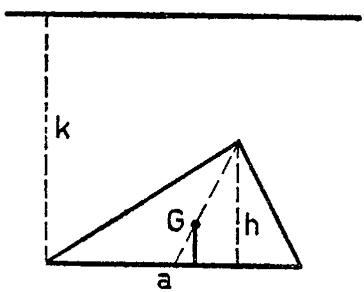
முன்னுள்ள குறிப்பீடுகளோடு

$$\text{முக்கோணியின் பரப்பளவு} = \tfrac{1}{2}ah.$$

$$\text{புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம்} = k + \tfrac{1}{3}h;$$

$$\therefore \text{ முக்கோணியில் மொத்த உதைப்பு} = \rho.\tfrac{1}{2}ah(k + \tfrac{1}{3}h).$$

(5) கீழோரம் k ஆழத்தில் கிடையாகவுள்ள முக்கோணி.



படம் 32

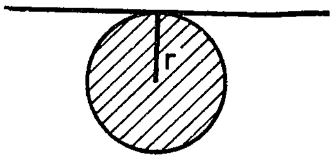
முக்கோணியின் பரப்பளவு $=\frac{1}{2}ah$.

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $=k-\frac{1}{3}h$;

$\therefore$ முக்கோணியில் மொத்த உதைப்பு $=\rho.\frac{1}{2}ah(k-\frac{1}{3}h)$.

(6) பரிதியின் புள்ளியொன்று பரப்பிலுள்ள வட்டம்.

வட்டம் r என்னும் ஆரையுடையதாகுக.



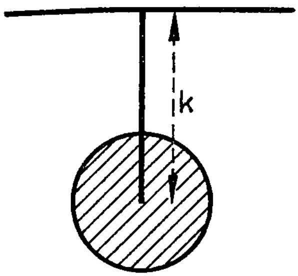
படம் 33

வட்டத்தின் பரப்பளவு $=\pi r^2$.

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $=r$;

$\therefore$ வட்டத்தில் மொத்த உதைப்பு $=\rho.\pi r^2.r$.

(7) மையம் k ஆழத்திலுள்ள வட்டம்.



படம் 34

வட்டத்தின பரப்பளவு $=\pi r^2$

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $=k$;

$\therefore$ வட்டத்தில் மொத்த உதைப்பு $=\rho.\pi r^2.k$.

(8) வரைப்புறும் விட்டம் பரப்பிலுள்ள அரைவட்டம்.



படம் 35

ஆரை r ஆகுக.

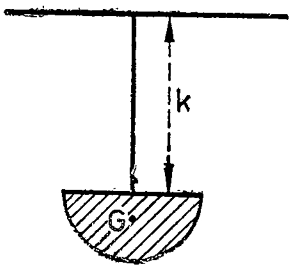
$$\text{அரைவட்டத்தின் பரப்பளவு} = \frac{\pi r^2}{2}$$

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $= \dfrac{4r}{3\pi}$ (*Tutorial Statics* ப. 318 ஐப் பார்க்க)

$$\therefore \text{ அரைவட்டத்தில் மொத்த உதைப்பு} = \rho . \frac{\pi r^2}{2} . \frac{4r}{3\pi}$$

$$= \tfrac{2}{3}\rho r^3.$$

(9) வரைப்புறும் விட்டம் மிகமேலாகவும் k ஆழத்திற் கிடையாகவுமுள்ள அரை வட்டம்.



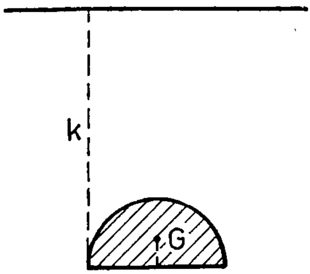
படம் 36

$$\text{அரைவட்டத்தின் பரப்பளவு} = \frac{\pi r^2}{2}.$$

$$\text{புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம்} = k + \frac{4r}{3\pi};$$

$$\therefore \text{ அரைவட்டத்தில் மொத்த உதைப்பு} = \rho . \frac{\pi r^2}{2}\left(k + \frac{4r}{3\pi}\right).$$

(10) வரைப்புறும் விட்டம் k ஆழத்திற் கிடையாகவும் வளைந்த ஓரம் மிகமேலாகவுமுள்ள அரைவட்டம்.



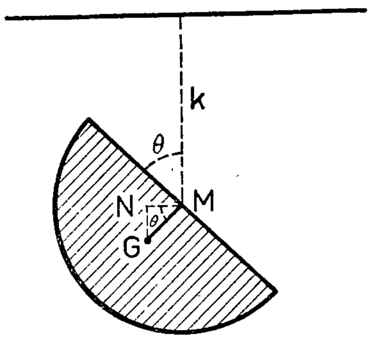
படம் 37

அரைவட்டத்தின் பரப்பளவு $=\frac{1}{2}\pi r^2$.

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $=k-\dfrac{4r}{3\pi}$;

$\therefore$ அரைவட்டத்தில் மொத்த உதைப்பு $=\rho.\frac{1}{2}\pi r^2\left(k-\dfrac{4r}{3\pi}\right)$.

(11) படம் 38 இல் உள்ளதுபோல் மையம் k ஆழத்திலும் வரைப்புறும் விட்டம் நிலைக்குத்தோடு θ சாய்விலுமுள்ள அரைவட்டம்.



படம் 38

அரைவட்டத்தின் பரப்பளவு $=\frac{1}{2}\pi r^2$.

படத்திலிருந்து, $\angle GMN=\theta$

$\therefore$ GN $=$ GM சைன் θ

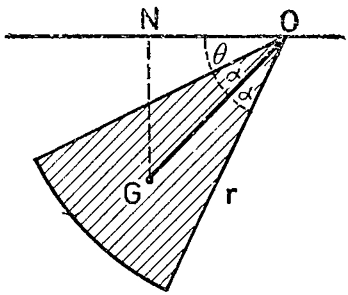
$=\dfrac{4r}{3\pi}$ சைன் θ.

$$\therefore \text{ புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம்} = k + \frac{4r}{3\pi} \text{ சைன் } \theta.$$

$$\therefore \text{ அரைவட்டத்தில் மொத்த உதைப்பு} = \rho . \tfrac{1}{2}\pi r^2 \left(k + \frac{4r}{3\pi} \text{ சைன் } \theta\right).$$

(12) மையம் பரப்பிலுள்ள வட்ட ஆரைச்சிறை.

ஆரைச்சிறை மையத்தில் 2α என்னுங் கோணத்தை எதிரமைக்க, ஓராரை கிடையோடு θ சாய்வு கொள்க (படம் 39).



படம் 39

ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}r^2 \, (2\alpha)$, (*Tutorial Trigonometry*, ப. 305)

$$= r^2\alpha.$$

G ஆனது புவியீர்ப்பு மையமாயின் அது சமச்சீரச்சில் $OG = \frac{2}{3}r \, \frac{\text{சைன் } \alpha}{\alpha}$ ஆகுமாறு கிடக்கும் (*Tutorial Statics*, ப. 318).

$\therefore$ GN ஆனது பரப்பின் கீழ் G யின் ஆழத்தைக் குறிக்குமாயின்

$$GN = OG \text{ சைன் } (\theta + \alpha)$$

$$= \tfrac{2}{3} r \frac{\text{சைன் } \alpha}{\alpha} \text{ சைன் } (\theta + \alpha).$$

$$\therefore \text{ ஆரைச்சிறையில் மொத்த உதைப்பு} = \rho r^2 \alpha \tfrac{2}{3} r \frac{\text{சைன் } \alpha}{\alpha} \text{ சைன் } (\theta + \alpha)$$

$$= \tfrac{2}{3}\rho r^3 \text{ சைன் } \alpha \text{ சைன் } (\theta + \alpha).$$

முன்னுள்ள எல்லாவற்றிலும் ஒவ்வொரு வகையிலும் பெறப்பட்ட மொத்த உதைப்பானது பரப்பில் ஒரு பக்கத்திலுள்ள உதைபபாகும் என்பது ஞாபகத்தில் வைக்கப்படவேண்டும். இவ்வுருவங்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட தடிப் பைக் கொண்ட அடர்களைக் (அதாவது இவ்வடிவுகளில் ஆக்கப்படும் தட்டுகளை) குறிக்குமாயின் ஒவ்வொரு வகையிலும் அடரின் மற்றைப் பக்கத்தில்

ஒரு சமமான மொத்த உதைப்பு உண்டு. இக் காரணத்தாலேயே நாம் அவற்றைப் "பரப்பளவுகள்" அல்லது "கேத்திரகணித உருவங்கள்" எனக் கூறியுள்ளோம்.

உதாரணம் 1. **14 அடி அகலமான ஒரு நிலைக்குத்துப் படலையின் ஒரு பக்கம் 10 அடி ஆழமுள்ள கடல் நீரின் அமுக்கத்தைத் தாக்குமாயின் படலையில் மொத்த உதைப்பைக் காணல்.**

அமுக்கம் தாக்கும் பரப்பளவு $= 14 \times 10 = 140$ சதுர அடி ;

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $= 5$ அடி.

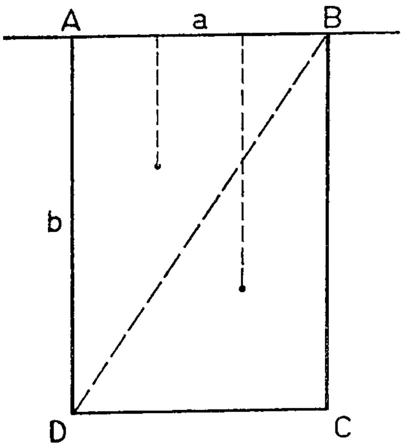
ஒரு கன அடி கடல்நீர் 64 இருத்தல் நிறையாதலால், பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தில் அமுக்கச் செறிவு

$= 5 \times 64 = 320$ இரு. நிறை/சதுர அடி ;

$\therefore$ படலையில் உதைப்பு $= 320 \times 140$ இரு. நிறை.

$= 44{,}800$ இரு. நிறை $= 20$ தொன் நிறை.

உதாரணம் 2. **ஒரு பக்கம் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு செவ்வகம் ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். இச் செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டமொன்று இச் செவ்வகத்தைக் கீழ் முக்கோணி உதைப்பு மேல் முக்கோணி உதைப்பின் இருமடங்காகுமாறு இரு முக்கோணிகளாகப் பிரிக்குமெனக் காட்டுக.**



படம் 40

படம் 40 ஐப் பார்க்க.

ABD என்னும் முக்கோணியில் உதைப்பு $= \rho . \frac{1}{2}ab . \frac{b}{3}$

$= \frac{1}{6}\rho ab^2.$

BCD என்னும் முக்கோணியில் உதைப்பு $=\rho.\frac{1}{2}ab.\frac{2}{3}b$

$$=\tfrac{1}{3}\rho ab^2.$$

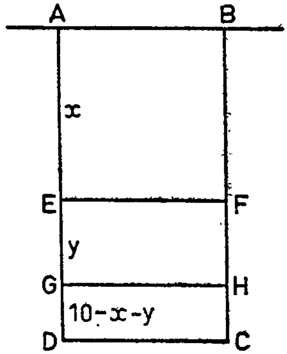
இதற்குக் காரணம், BCD என்னும முக்கோணியின புவியீர்ப்பு மையம் பரப்பின கீழ் $\frac{2}{3}b$ யில இருத்தலே.

ஆகவே $$\frac{\triangle\ \text{BCD யில் உதைப்பு}}{\triangle\ \text{ABD யில் உதைப்பு}}=\frac{\frac{1}{3}\rho ab^2}{\frac{1}{6}\rho ab^2}=2,$$

அதாவது $\triangle$ BCD யில் உதைப்பு $=2\times\triangle$ ABD யில் உதைப்பு.

உதாரணம் 3. **ABCD என்னுஞ் செவ்வகப் பரப்பளவினது AB என்னும் பக்கம் நீர்ப்பரப்பிலிருக்க 10 அடி நீளமுள்ள AD என்னும் பக்கம் நிலைக்குத்தாய்க் கீழாழ்த்தப்படும். ஒவ்வொரு பாகத்திலும் உதைப்பு ஒன்றேயாகுமாறு இடைக்கோடுகளால் இப்பரப்பளவை மூன்று பாகங்களாகப் பிரிக்க.**

படம் 41, இச் செவ்வகப் பரப்பளவைக் குறிக்க.



படம் 41

EF,GH என்பன பிரிகோடுகளாகுக. AE $=x$ அடி, EG $=y$ அடி ஆகுக.

ஆயின் CD $=(10-x-y)$ அடி.

ABFE யில் உதைப்பு $=$ ABFE யின் பரப்பளவு $\times$ பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தில் அமுக்கச் செறிவு.

$$=x.\text{AB}\times w\frac{x}{2}.$$

இதே மாதிரி EFHG இல் உதைப்பு $= y.\text{AB}\times w\left(x+\frac{y}{2}\right),$

GHCD யில் உதைப்பு $=(10-x-y)\ \text{AB}\times w\left(x+y+\frac{10-x-y}{2}\right).$

இவற்றைச் சமப்படுத்த

$$\frac{x^2}{2}=y\left(x+\frac{y}{2}\right)=(10-x-y)\left(x+y+\frac{10-x-y}{2}\right),$$

$$\therefore\ x^2=y(2x+y)=(10-x-y)(10+x+y)=100-(x+y)^2.$$

முதல இரண்டிலுமிருந்து $x^2-2xy-y^2=0$ எனப் பெறுவோம்.

முதலாவதிலும் ஈற்றிலுமிருந்து $2x^2+2xy+y^2=100$ எனப் பெறுவோம்.

கூட்டுமிடத்து $3x^2=100$ அல்லது $x=\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

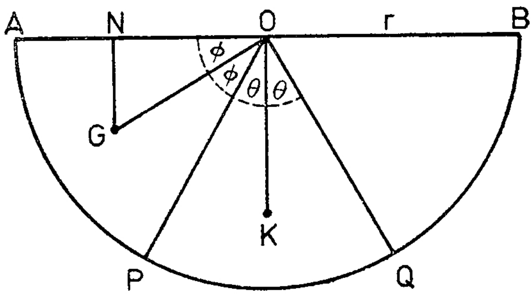
அன்றியும் $(x+y)^2=100-x^2=100-\frac{100}{3}=\frac{200}{3}$;

$$\therefore\ x+y=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{10}{3}\sqrt{6}\ ;$$

$$\therefore\qquad y=\tfrac{10}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3}).$$

ஆகவே $x=5{\cdot}77$ அடி, $y=2{\cdot}39$ அடி, $10-x-y=1{\cdot}84$ அடி.

உதாரணம் 4. O என்னும் மையமும் AOB என்னும் விட்டமுமுள்ள ஒரு அரைவட்ட அடர் தன் தளம் நிலைக்குத்தாகுமாறும் விட்டம் AOB சுயாதீனப் பரப்பிலிருக்குமாறும் ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும்.



படம் 42

OP, OQ என்பன, AOP, QOB என்னுங் கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் 2ϕ ஆகுமாறும் POQ என்னுங் கோணம் 2θ ஆகுமாறுமுள்ள ஆரைகளாகும். AOP, POQ, QOB என்னும் ஆரைச்சிறைகள் ஒவ்வொன்றிலும் திரவ உதைப்பு ஒரேயளவாயின் சைன் $\theta=$ சைன்$^2\phi$ எனக் காட்டுக.

சைன் $\theta=\frac{1}{3}$ என்பதை உய்த்தறிக அல்லது நேரடியாக நிறுவுக.

(*Inter. Sc.*)

படம் 42 அடரைக் குறிக்க. G, K என்பன காட்டப்பட்டுள்ளதுபோல் இரண்டு அடுத்துள்ள ஆரைச்சிறைகளின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் (அல்லது மையப்போலிகள்) ஆகுக. GN ஆனது AB என்பதற்குச் செங்குத்தாய் வரையப்படுக. ஆயின், AB யானது (திரவப் பரப்பில்) கிடையாதலால் GN நிலைக்குத்தாகும்.

r ஆனது அரைவட்ட ஆரையாயின்,

$$OG = \frac{2}{3}r \frac{\text{சைன் } \phi}{\phi},$$

$$OK = \frac{2}{3}r \frac{\text{சைன் } \theta}{\theta}.$$

OK யானது AB யிற்குச் செங்குத்தாதலால நிலைக்குத்தாகும்.

நாம் இப்போது மூன்று ஆரைச்சிறைகளிலும் உதைப்புக்களை எழுதலாம்.

BOQ என்னும் ஆரைச்சிறையில் உதைப்பு

$= $ AOP என்னும் ஆரைச்சிறையில் உதைப்பு (சமச்சீரால்)

$= \rho \times$ AOP என்னும் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $\times$ GN

$= \rho.\frac{1}{2}r^2(2\phi)$. OG சைன் ϕ, GN $=$ OG சைன் ϕ ஆதலால்.

OG யின் மேற்றந்த பெறுமானத்தைப் பாவிக்க

$= \frac{2}{3}\rho r^3$ சைன்$^2\phi$ ....(i)

POQ என்னும் ஆரைச்சிறையில் உதைப்பு

$= \rho \times$ POQ என்னும் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $\times$ OK

$$= \rho.\frac{1}{2}r^2(2\theta).\frac{2}{3}r\frac{\text{சைன் } \theta}{\theta};$$

$= \frac{2}{3}.\rho r^3$ சைன் θ ....(ii).

ஆரைச்சிறைகள் எல்லாவற்றிலும் திரவ உதைப்பு ஒரேயளவாதலால் (i), (ii) என்பனவற்றைச் சமன்படுத்த

$$\text{சைன் } \theta = \text{சைன்}^2\phi$$

சைன் $\theta = \frac{1}{3}$ என்பதை பின்வருமாறு நேரடியாக நிறுவலாம் :

ஒவ்வொரு ஆரைச்சிறையிலும் உதைப்பு ஒரேயளவாதலால், ஆரைச் சிறையொன்றிலுள்ள உதைப்பினது மும்மடங்கு நாம் வேறுமாதிரிக் காணக்கூடிய அரைவட்டத்திலுள்ள மொத்த உதைப்புக்குச் சமமாகவேண்டும். $\alpha = \pi/2$ ஆக, ஓரரை வட்டமானது 2α கோணமுள்ள ஆரைச்சிறையாதலால் தநத சூத்திரததிலிருந்து ஓரரை வட்டத்தினது புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையத்திலிருநது

$$\frac{2}{3}r\frac{\text{சைன் } \pi/2}{\pi/2},$$

அல்லது $\dfrac{4r}{3\pi}$, என்னுந் தூரத்திலிருக்கும்.

ஆகவே முழு அரை வட்டத்திலும் உதைப்பு $= \rho.\frac{1}{2}\pi r^2.\dfrac{4r}{3\pi}$..........(iii)

இது ஒவ்வொரு ஆரைச்சிறையிலுமுள்ள உதைப்பின் மும்மடங்காக வேண்டும்.

∴ (iii) என்பதை (ii) இன் மும்மடங்குக்குச் சமமாக்க

$$\rho.\tfrac{1}{2}\pi r^2\frac{4r}{3\pi}=3.\tfrac{2}{3}\rho r^3 \text{ சைன் } \theta,$$

அல்லது $\quad$ சைன் $\theta=\frac{1}{3}$.

சைன் $\theta=$ சைன்$^2\phi$, $\theta+2\phi=90°$

என்பன எமக்குத் தெரியுமாதலால் இம் முடிபை உய்த்தறியலாம்.

$$\therefore \quad \phi=45°-\tfrac{1}{2}\theta.$$

$$\therefore \quad \text{சைன் } \phi=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ கோசை } \tfrac{1}{2}\theta-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ சைன் } \tfrac{1}{2}\theta;$$

$$\therefore \quad \text{சைன்}^2 \phi=\tfrac{1}{2} (\text{கோசை}^2 \tfrac{1}{2}\theta-2 \text{ சைன் } \tfrac{1}{2}\theta \text{ கோசை } \tfrac{1}{2}\theta + \text{சைன்}^2 \tfrac{1}{2}\theta)$$

$$=\tfrac{1}{2} (1-2 \text{ சைன் } \tfrac{1}{2}\theta \text{ கோசை } \tfrac{1}{2}\theta)$$

$$=\tfrac{1}{2} (1-\text{சைன் } \theta);$$

$$\therefore \quad \text{சைன் } \theta=\text{சைன்}^2\phi=\tfrac{1}{2} (1-\text{சைன் } \theta),$$

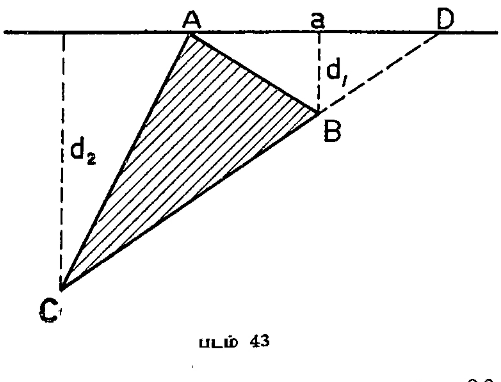
ஆகவே $\quad 2$ சைன் $\theta=1-$ சைன் θ,

அல்லது $\quad 3$ சைன் $\theta=1$,

சைன் $\theta=\frac{1}{3}$.

28. ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் எளிய கேத்திர கணித உருவங்களின் சேர்மானத்தில் மொத்த உதைப்பு

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட எளிய வடிவுகளின் கூட்டாக அல்லது வித்தியாசமாகக் கருதப்படககூடிய பரப்பளவு ஒன்றில் மொத்த



படம் 43

உதைப்பைக் காண்பதற்கு § 27 என்பன.த நாம் விரிக்கலாம். இது உண்மையான உதாரணங்களால் மிக நன்முய் எடுத்துக்காட்டப்படலாம்.

உதாரணம் 1. ABC என்னும் முக்கோணி ρ அடர்த்தியுள்ள பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். அதன் A என்னும் உச்சி பரப்பிலும் B, C என்பன முறையே d_1, d_2 என்னும் ஆழங்களிலுமிருக்கும். CB நீட்டப்பட்டு பரப்பை D யிற் சந்திக்குமாயின் ABC என்னும் முக்கோணியில் பாயி அமுக்கத்தின் மொத்த உதைப்பை d_1, d_2, a என்பனவற்றின் சார்பாய்க் காண்க ; இங்கு $a = AD$.

இவ்வகையில் (படம் 43 ஐப் பார்க்க) நாம் ABC என்னும் முக்கோணி யின் புவியீர்ப்பு மையததைக் காணவேண்டியதில்லை ; ஏனெனின் ACD, ABD என்னும் முக்கோணிகளில மொத்த உதைப்புககளை நேரடியாகக் கண்டுகொண்டு கழிக்கலாம்.

எனவே, $\triangle ABD$ யின் பரப்புளவு $= \frac{1}{2}ad_1$.

$\therefore \quad \triangle ABD$ யில் உதைப்பு $= \rho . \frac{1}{2}ad_1 . \dfrac{d_1}{3}$

$$= \tfrac{1}{6}a\rho d_1^2.$$

மறுபடியும் $\triangle ACD$ யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}ad_2$.

$\therefore \quad \triangle ACD$ யில உதைப்பு $= \rho . \frac{1}{2}ad_2 . \frac{1}{3}d_2$

$$= \tfrac{1}{6}a\rho d_2^2.$$

ஆகவே, $\triangle ABC$ யில் உதைப்பு $= \triangle ACD$ யில் உதைப்பு $-$ $\triangle ABD$ யில் உதைப்பு

$$= \tfrac{1}{6}a\rho d_2^2 - \tfrac{1}{6}a\rho d_1^2$$

$$= \tfrac{1}{6}a\rho\,(d_2^2 - d_1^2).$$

உதாரணம் 2. a, b என்னும் நீளங்களும் d என்னும் இடைத் தூரமுமுள்ள தனது சமாந்தரப் பக்கங்கள் கிடையாகவும், சிறிய பக்கம் (a) மிகமேலாகக் k ஆழத்திலும் உள்ள சரிவகத்தில் மொத்த உதைப்பைக் காண்க.

ABCD (படம் 44) சரிவகத்தைக் குறிக்கட்டும். ஆயின் AN, BM என்னும் செங்குத்துக்களை வரைவோமாயின சரிவகம் ஒரு செவவகமாகவும் இரு முக்கோணிகளாகவும் பிரிக்கப்படும்.

$$DN = x \text{ ஆயின் } MC = b - a - x.$$

சரிவகத்தினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழத்தைக் (z) காண்பதற்குப் பின்வருவன தேவைப்படும்.

$\triangle$ AND யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}xd$,

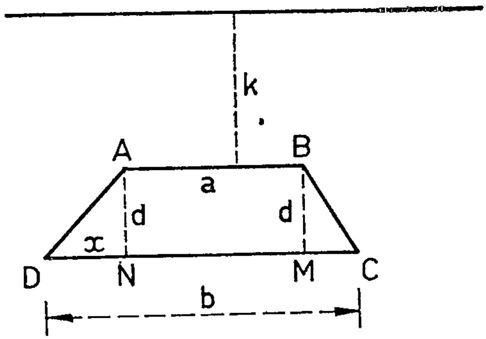
$\triangle$ AND யின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $= k + \frac{2}{3}d$,

செவ்வகம் ABMN இன் பரப்பளவு $= ad$,

இச் செவ்வகத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $= k + \dfrac{d}{2}$,

$\triangle$ BMC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}d(b-a-x)$,

$\triangle$ BMC யின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $= k + \frac{2}{3}d$.



படம் 44

சரிவகத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக காண்பதற்குரிய சமனபாடு,

சரிவகத்தின் பரப்பளவு $\times \bar{z} = \triangle$ AND பரப்பளவு $\times$ அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $+$ செவ்வகப் பரப்பளவு $\times$ அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $+ \triangle$ BMC பரப்பளவு $\times$ அதன புவியீர்ப்புமையத்தின் ஆழம், என்பதாகும்,

சரிவகத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}(a+b)d$ ஆதலால்

$$\frac{1}{2}(a+b)d.\bar{z} = \frac{1}{2}xd(k+\tfrac{2}{3}d) + ad(k+\tfrac{1}{2}d) + \tfrac{1}{2}d(b-a-x)(k+\tfrac{2}{3}d)$$

$$= \tfrac{1}{2}d(k+\tfrac{2}{3}d)(x+b-a-x) + ad(k+\tfrac{1}{2}d)$$

$$= \tfrac{1}{2}d(bk+\tfrac{2}{3}bd-ak-\tfrac{2}{3}ad) + ad(k+\tfrac{1}{2}l)$$

$$= \tfrac{1}{2}bdk + \tfrac{1}{3}bd^2 - \tfrac{1}{2}adk - \tfrac{1}{3}ad^2 + adk + \tfrac{1}{2}ad^2$$

$$= \tfrac{1}{2}adk + \tfrac{1}{2}bdk + \tfrac{1}{6}ad^2 + \tfrac{1}{3}bd^2$$

$$= \frac{d}{6}(3ak + 3bk + ad + 2bd).$$

இடதுகைப்பக்கம் சுருக்கப்படவேண்டியதில்லை ; ஏனெனின் $\rho \times$ பரப் பளவு $\times \bar{z}$ என்னும மொததை உதைபபே எமக்கு வேண்டியதால், பரப்பளவு $\times \bar{z}$ ஆகும் இடதுகைப் பக்கம இவ்வடிவத்திலேயே விடப்படலாம்.

ஆயின, மொத்த உதைப்பு $= \rho \times$ வலதுகைப் பக்கம்.

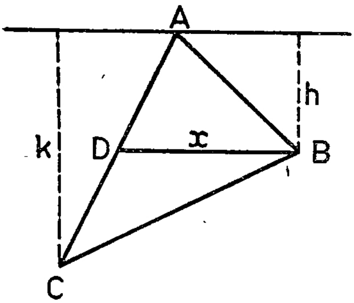
$$= \frac{\rho d}{6}\left[3l\,(a+b) + d(a+2b)\right].$$

உதாரணம் 3. ABC என்னும் முக்கோணிப் பரப்பளவு உச்சி A பரப்பிலும் B, C என்பன முறையே h, k ஆழங்களிலும் இருக்குமாறு திரவத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படும். B யிற்கூடாக வரையப்படும் கிடைக்கோடு இம் முக்கோணியைத் திரவத்தின் விளையுள் உதைப்புக்கள் சமமாகும் இருபாகங்களாகப் பிரிக்குமாயின்

$$h/k = (1 + \sqrt{17})/8$$

என நிறுவுக ; வளிமண்டல அமுக்கம் புறக்கணிக்கப்படும்.

(*Inter. Sc.*)



படம் 45

படம் 45 முக்கோணியைக் குறிக்கட்டும். B யிற் கூடாகச் செல்லுங் கிடைக்கோடு AC என்னும் ஓரத்தை D யில் வெட்டும் என உத்தேசிக்க. $BD = x$ என்க. இவ்வகையில் ABD, CBD என்னும் முக்கோணிகளில் உதைப்புக்களைக் கண்டு அவற்றைச் சமப்படுத்தவேண்டும்.

$$\triangle \text{ ABD யின் பரப்பளவு} = \tfrac{1}{2}hx.$$

$$\triangle \text{ ABD யினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம்} = \tfrac{2}{3}h.$$

$$\therefore \quad \triangle \text{ ABD யில் உதைப்பு} = \rho.\tfrac{1}{2}hx.\tfrac{2}{3}h$$

$$= \tfrac{1}{3}\rho x h^2 \quad \text{..............(i)}$$

$$\triangle \text{ BDC யின் பரப்பளவு} = \tfrac{1}{2}x(k-h).$$

$$\triangle \text{ BDC யினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம்} = h + \frac{k-h}{3}$$

$$= \frac{2h+k}{3}.$$

$$\therefore \quad \triangle \text{ BDC யில் உதைப்பு} = \rho.\tfrac{1}{2}x(k-h)\frac{(2h+k)}{3}$$

$$= \tfrac{1}{6}\rho x(k-h)(2h+k) \quad \text{..(ii)}$$

இரு முக்கோணிகளிலுள்ள உதைப்புக்களும் சமமாதலால் (i) = (ii) ;

$$\therefore \quad \tfrac{1}{3}\rho x h^2 = \tfrac{1}{6}\rho x(k-h)(2h+k);$$

$$\therefore \quad h^2 = \tfrac{1}{2}(2hk - 2h^2 + k^2 - hk);$$

$$\therefore \quad 2h^2 = hk + k^2 - 2h^2.$$

$$\therefore \quad 4h^2 - hk - k^2 = 0.$$

இருபடிச் சமன்பாட்டுக்குரிய நெறியால் இதைத் தீர்க்க

$$h = \frac{k \pm \sqrt{(k^2 + 4.2.2k^2)}}{8}$$

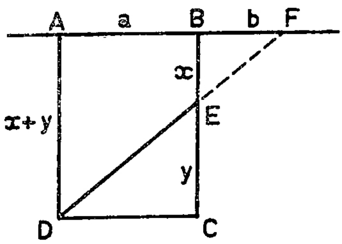
$$= \frac{k(1 \pm \sqrt{17})}{8};$$

மறைப் பெறுமானம் அனுமதிக்கத் தகாதாதலால்

$$\frac{h}{k} = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}.$$

உதாரணம் 4. ABCD என்னுஞ் செவ்வகம் AB நீர்க்கோட்டிலிருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். CDE, ABED என்னும் பரப்பளவுகளில் திரவ உதைப்புக்கள் சமமாகுமாறு B யானது BC யில் ஒரு புள்ளியாயின் BE : EC $= 1 : \sqrt{3}$ எனக் காட்டுக. *(Inter. Sc.)*

BE $= x$, EC $= y$ (படம் 46) ஆகுக ; ஆயின் நாம் ABED என்னுஞ் சரிவகத்திலும் CDE என்னும் முக்கோணியிலும் மொத்தத் திரவ உதைப்புக் காண வேண்டும். சரிவகத்தில் உதைப்பைக் காண்பதற்கு நாம் அதனை ஒரு செவ்வகம் ஒரு முக்கோணி என்பவற்றின் கூட்டாகக் கருதலாம் அல்லது பரப்பை F இற் சந்திக்குமாறு DE என்பதை நீட்டிக்கொண்டு ADF, BEF என்னும் முக்கோணிகளிலுள்ள மொத்த உதைப்புக்களின் வித்தியாசத்தைக்கணிக்கலாம்.



படம் 46

AB $= a$, BF $= b$ ஆயின்,

சரிவகம் ABED யில் உதைப்பு $=$ முக்கோணி ADF இல் உதைப்பு
$-$ முக்கோணி BEF இல் உதைப்பு.

$$= \rho.\tfrac{1}{2}(a+b)(x+y) \times \frac{(x+y)}{3} - \rho.\tfrac{1}{2}bx \times \frac{x}{3} \quad \text{(i)}.$$

BEF, DEC என்பன இயல்பொத்த முக்கோணிகளாதலால்,

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{y}; \quad \therefore \; b = \frac{ax}{y}.$$

(i) இல் b யிற்குப் பிரதியிட

சரிவகம் ABED யில் உதைப்பு $=\frac{1}{6}\rho\left(a+\frac{ax}{y}\right)(x+y)^2-\frac{1}{6}\rho x^2.\frac{ax}{y}$

$$=\frac{a\rho}{6y}\Big[(x+y)^3-x^3\Big]$$

$$=\frac{a\rho}{6}(3x^2+3xy+y^2)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

அன்றியும், $\triangle$ CDE யின் பரப்பளவு $=\frac{1}{2}ay$,

$\triangle$ CDE யின் புவியீர்ப்பு

மையத்தின் ஆழம் $=x+\frac{2}{3}y$;

$\therefore$ $\triangle$ CDE யில் உதைப்பு $=\rho.\frac{1}{2}ay\left(x+\frac{2}{3}y\right)$

$$=\frac{a\rho}{6}(3xy+2y^2)\;\;..\text{(iii)}$$

இவ்வுதைபபுக்கள சமமெனத் தரப்படுதலால் (ii), (iii) என்பனவற்றைச் சமப்படுதத

$$\frac{a\rho}{6}(3x^2+3xy+y^2)=\frac{a\rho}{6}(3xy+2y^2)\;;$$

$$\therefore\quad 3x^2+y^2=2y^2\;;$$

$$\therefore\quad 3x^2=y^2\;;$$

$$\therefore\quad \frac{x}{y}=\frac{1}{\sqrt{3}}\;;$$

$$\therefore\quad \text{BE : EC}=1:\sqrt{3}.$$

29. பாயியோடு தொடுகையிலுள்ள நிலைக்குத்தல்லாத் தளப் பரப் பளவுகளில் மொத்த உதைப்பு

§ 26 இன் தேற்றம் தளப் பரப்பளவு நிலைக்குத்தா அல்லவா என்பதைச் சாராது உண்மையாகுமென நிறுவப்பட்டுள்ளது. மொத்த உதைப்பானது உருவத்தின் பரப்பளவு புவியீர்ப்புமையத்தில் அமுக்கச் செறிவு என்பன வற்றையே சாரும். ஆகவே § 26 இலுள்ள அதே செயன்முறை இங்கும் மொத்த உதைப்பைக் காண்பதற்கு வழங்கபபடலாம்.

உதாரணம் 1. **100 மீற்றர் நீளமும் 30 மீற்றர் அகலமும் உள்ள ஒரு நீர்த்தடுப்பின் சாய்முகத்தில், அதன் மிகத் தாழ்ந்த பாகம் பரப்பின் கீழ்12 மீற்றர் ஆழத்திலிருக்குமிடத்து, மொத்த நீருதைப்பைக் காணல்.**

அமுக்கம் தாக்கும் ப ப்பளவு $=100\times30=3000$ சதுர மீற்றர்.

அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் = மிகத் தாழ்ந்த பாகத்தினது ஆழத்தின் அரைப் பங்கு

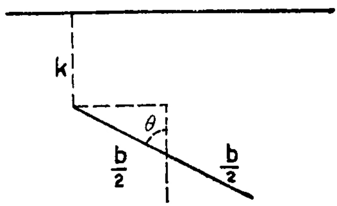
$=6$ மீ. $=600$ சமீ.

∴ புவியீர்ப்பு மையத்தில் அமுககச் செறிவு
$=600$ கிராம் நிறை/சதுர சமீ.
$=600\times100\times100$ கிராம் நிறை/சதுர சமீ.
$=6000$ கிலோக் கிராம் நிறை/சதுர சமீ.

∴ மொத்த உதைப்பு $=6000\times3000$ கிலோக் கிராம் நிறை.
$=18,000,000$ கிலோக் கிராம் நிறை.

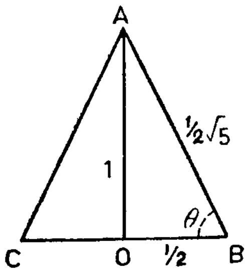
உதாரணம் 2. **ஒரு செவ்வகப் பரப்பளவு அதன் இரண்டு ஓரங்கள் கிடையாகவும் அதன் தளம் நிலைக்குத்தோடு θ என்னும் கோணத்தை ஆக்குமாறும் பாயியில் உள்ளாழ்த் தப்படும். மொத்த உதைப்பைக் காணல்.**

செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் a, b என்னும் நீளங்கள் உடையதாகுக. ஆயின் மேலோரம் (a) பரப்பின் கீழ் k ஆழத்திலுள்ளதாயின் பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையம் $k+\frac{b}{2}$ கோசைθ ஆழத்திலுள்ளது. படம் 47 உருவத்தின ஒரு வெட்டைக் காட்டும். ஆகவே, மொத்த உதைப்பு$=\rho.ab\left(k+\frac{b}{2}\text{கோசை}\,\theta\right)$.



படம் 47

உதாரணம் 3. **ஒரு பொட் செங்கூம்பகம் 1 அடி பக்கமுள்ள சதுர அடியையும் 1 அடி உயரத்தையும் உடையது. இக்கூம்பகம் கன அடிக்கு 62·4 இறுத்தல் நிறையுடைய நீரால் நிரப்பப்படுமாயின், அதன் அடியிலும் நாலு முகங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் மொத்த உதைப்பைக் காண்க.**



படம் 48

அடியின பரபபளவு 1 சதுர அடியும், அடியினது புவியீர்ப்பு மையததின ஆழம் உச்சியிலிருந்து 1 அடியும் ஆதலால ; அடியில் மொத்த உதைப்பு $(\mathrm{T})=62.4$ இரு. நிறை. கூம்பக அடியை அதன் ஓரங்களுள் இரண்டுககுச் சமாந்தரமான ஒரு கோட்டில் வெட்டும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தால் ஆக்கப்படும் கூம்பக வெட்டு ABC (படம் 48) ஆகுக. ஆயின் O வானது சதுர அடியின் மையமாயின் $\mathrm{AO}=1$ அடி, $\mathrm{OB}=\frac{1}{2}$ அடி என்பன பெறப்படுதலால் $\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$ அடி. θ என்பது $\angle\mathrm{ABO}$ ஆயின், கோசை $\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

இனி AB யானது முக்கோணி முகத்திலுள்ள உயர்வுச் சரிவுக் கோடாகும்

ஒவ்வொரு முக்கோணி முகத்தினது பரப்பளவு $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{5}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{5}$ சதுர அடி ;

ஒவ்வொரு முக்கோணி முகத்தினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $=\frac{2}{3}\times 1$ அடி. ஒவ்வொரு முக்கோணி முகத்திலும் மொத்த உதைப்பு (F) $=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\sqrt{5}$

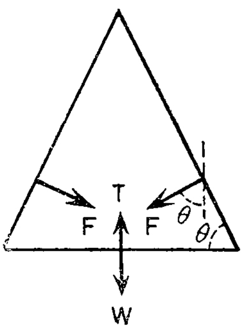
$\times 62{\cdot}4$ இரு. நிறை

$=(10{\cdot}4)\sqrt{5}$ இரு. நிறை.

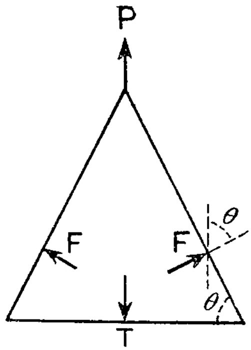
இனி, கூம்பகத்தின் கனவளவு $\frac{1}{3}$. 1.1 கன அடி ஆதலால் கூம்பகத்திற் கொள்ளப்படும் நீரின் நிறை $\frac{1}{3}$ (62·4) அல்லது 20·8 இரு. நிறை ஆகும்.

நீரின் நிறை 20·8 இரு. நிறை ஆனபோதிலும் அடியில் மொத்த உதைப்பு எவ்வண்ணம் 62·4 இரு. நிறை ஆகுமென்பதைச் செப்பமாய் மெய்ப்படுத்திக் கொள்வது மிக முக்கியமாகும். இதனை நாம் ஒரு வரிப்படம் மூலம் கூடுதலாகப் பரிசோதித்து எல்லா விசைகளையும் நிலைக்குத்தாய் துணித்துச் சரிபார்க்கலாம். விசைகளின் திசைகளைக் காட்டுவதற்கு அம்புகள் இடப்பட முன்னர் கொள்ளியிலுள்ள பாயியின் சமநிலையையா அல்லது கொள்ளியின் சமநிலையையா நாம் ஆராய்கிறோமென்பதைத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

படம் 49 ஐப் பார்க்க. அம்புகளின் திசைகள் (வெட்டில்) பாயியைத் தாக்கும் விசைகளைக் காட்டும். உண்மையில் நாலு முகங்கள் இருத்தலால்,



படம் 49



படம் 50

எல்லாம் நிலைக்குத்தோடு θ கோணத்தை ஆக்கும் நாலு F விசைகள் உண்டு. ஆகவே பாயியில் உள்ள விசைகளாவன ; (W என்னும்) பாயி நிறையும், F என்னும் நாலு விசைகளோடு T என்னும் விசையு மாக ஐந்து விகாரப்படுத்தும் விசைகளுமே. F என்னும் விசைகள் முக்கோணி முகங்களின புவியீர்ப்பு மையங்களிலே தாக்கா என்பதை முக்கியமாகக் கவனிக்க ; அவை கீழே உள்ள புள்ளி (அமுக்க மையம்)

ஒன்றிலே தாக்கும். நாம் நிலைக்குத்தாய்த் துணிப்போமாயின் ஒவ்வொரு வகையிலும் F இன் உண்மையான நிலையைப்பற்றி அக்கறைப்பட வேண்டியதில்லை. ஆயின்,

$$W+4F \text{ கோசை } \theta=T \text{ ....(i).}$$

எமது பெறுமானங்களின் பிரதியீட்டால் இதனைச் சரி பார்க்கலாம்.

இடதுகைப் பக்கம் $=20\cdot8+4(10\cdot4)\sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{5}}$ இரு. நிறை.

$=20\cdot8+41\cdot6$ இரு. நிறை.

$=62\cdot4$ இரு. நிறை ;

இதுவே அடியில் மொத்த உதைப்பாகிய T என்பதற்கு நாம் பெற்ற பெறுமானம்.

இனி கூம்பக வடிவுடைய கொள்ளியைத் தாக்கும் விசைகளை எடுத்து நோக்குக. அது ஒரு மேசையில் அல்லது ஒரு கயிற்றால் தாங்கப்பட்டாலன்றிச் சமநிலையில் இருக்காது. பின்னதை உத்தேசிக்க, கயிற்றில் P இரு. நிறையுடைய இழுவை உண்டு எனக் கொள்க. கொள்ளியைத் தாக்கும் விசைகளின் திசைகள் படம் 50 இற் காட்டப்படுவன போன்றவையாகும் ; கொள்ளியின் நிறை புறக்கணிக்கப்படலாமென நாம் கொள்வோம். இவ் வரிப்படத்திற் சேர்த்தற்கு W இல்லை. W என்பது F என்னும் நாலு விசைகளையும் T என்பதையும் ஆக்கும் பாயியின் நிறையாகும்.

இவ்விசைகளை நிலைக்குத்தாய்த் துணிக்கக் கொள்ளியின் சமநிலைக்கு

$P+4F$ கோசை $\theta=T$, எனப் பெறுவோம்.

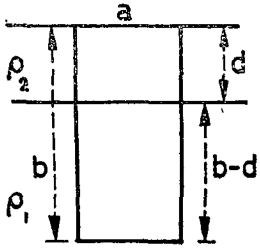
கயிற்றின் இழுவை P யானது W என்னும் பாயி நிறைக்குச் சமன என்பது தெளிவாதலால் இச் சமன்பாடு மேலுள்ள (i) ஐ ஒத்ததாகும்.

உள்ளாழ்த்தப்படுந் தளப்பரப்பில் மொத்த உதைப்புப்பற்றிய தேற்றத்தின் ஒரு மிக முக்கியமான கிளைத் தேற்றம் பின்வருமாறு : பரப்பிலுள்ள மொத்த உதைப்பானது பரப்பளவையும் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழத்தையுமே சாரும். ஆகவே, முழுப்பரப்பளவும் திரவப் பரப்பின் கீழ் இருக்குமாறு பரப்பளவு தன் புவியீர்ப்பு மையம்பற்றித் திருப்பப்படுமாயின் மொத்த உதைப்பு மாருது.

30. ஒன்றேடொன்று கலவாத பல்வேறு பாயிகளிற் பகுதியாய்க் கிடக்கும் தளப் பரப்பில் மொத்த உதைப்பு

பரப்பளவின் ஒரு பகுதி ஒரு பாயியோடு தொடுகையிலும் மற்றப் பகுதி வேறு அடர்த்தியுள்ள பாயியோடு தொடுகையிலும் இருக்குமிடத்து, நாம் ஒவ்வொரு பாகத்திலும் மொத்த உதைப்பைக் கண்டு அவற்றைக் கூட்ட வேண்டும்.

உதாரணம் 1, ρ_1 **அடர்த்தியுள்ள திரவத்தின்மேல்** ρ_2 **அடர்த்தியுள்ள திரவம்** d **அடி ஆழத்திற்கு மிபொருத்தப்படும்.** a, b $(b>d)$ **என்னும் பக்கங்களுள்ள ஒரு செவ்வகம்** a **நீளமுள்ள பக்கம் மேலுள்ள திரவத்தின் பரப்பிலிருக்குமாறு நிலைக்குத் தாய் உள்ளாழ்த்தப்படுமாயின் செவ்வகத்தில் மொத்த உதைப்பைக் காண்க.**



படம் 51

படம் 51 செவ்வகத்தைக் குறிக்க. இரு திரவங்களின் பொதுப் பரப்பு செவ்வகத்தை இரு சிறு செவ்வகங்களாகப் பிரிக்கும். மேற் செவவகம் ad பரப்பளவும், கீழ்ச் செவ்வகம் $a(b-d)$ பரப்பளவும் உடையன.

மேற் செவ்வகத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $\frac{d}{2}$ ஆழத்தில் இருத்தலால் இம் மையத்தில் அமுக்கச் செறிவு $\rho_2 . \frac{d}{2}$ ஆகும்.

$\therefore$ மேற் செவ்வகத்தில் உதைப்பு $= \rho_2 . \ ad . \ \frac{d}{2}$.

கீழ்ச் செவவகத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் சுயாதீனப் பரப்பின் கீழ் $d+\frac{1}{2}(b-d)$ ஆழத்தில் இருக்கும். இம்மையத்தில் அமுக்கச் செறிவு $\rho_2 d+\rho_1 \frac{b-d}{2}$ ஆகும்.

$\therefore$ கீழ்ச் செவ்வகத்தில் உதைப்பு $= a(b-d)\left[\rho_2 d+\rho_1 \frac{(b-d)}{2}\right]$

$\therefore$ செவ்வகத்தில் மொத்த உதைப்பு $= \frac{1}{2} a\rho_2 d^2 + a\rho_2 d(b-d)$

$$+\tfrac{1}{2} a\rho_1 (b-d)^2,$$

$$= \tfrac{1}{2} a \left[\rho_1 (b-d)^2 + \rho_2 d(2b-d)\right]$$

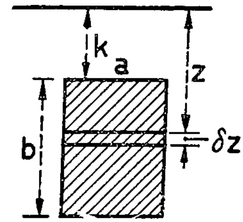
31. ஒரு தளப் பரப்பளவிலுள்ள மொத்த உதைப்பை புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையைச் சாரது காணல்

§26 இன் தேற்றம், ஒரு தள உருவத்தில் மொத்த உதைப்பை புவியீர்ப்பு மையம், அமுககச் செறிவு, உருவத்தின் பரப்பளவு என்பனவற்றின் சார்பாய் உணர்த்தும். பரப்பளவினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலை தெரியு மாயின அல்லது எளிதாய்க் கணிக்கப்படுமாயின மொத்தப் பரப்பளவு தெரியுமிடத்து பரப்பளவில் மொத்த உதைப்பு உடனடியாகக் காணப்படலாம். எனினும், பரப்பளவின் ஒரு சிறு பாகத்தில் அல்லது மூலகத்தில் உதைப்பைக் கண்டுகொண்டு அத்தகைய மூலகங்கள் எல்லாவற்றிலும் உள்ள உதைப்புக் களினுடைய கூட்டுத் தொகையின் எல்லையைக் காண்பதால் மொத்த உதைப்பு நேரடியாகக் காணப்படலாம் என்பது கவனிக்கப்படவேண்டும்.

நாம் இப்போது இரண்டு வழிகளால் ஒரு உதாரணத்தைச் செய்வோம். (i) நுண்கணிதம் வழங்கி (ii) நுண்கணிதம் வழஙகாது மொத்த உதைப்பை நேரடியாகக காண்போம்.

உதாரணம் 1. மேலோரம் கிடையாக k ஆழத்திலிருக்குமாறு ρ என்னும் அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் செவ்வகத்தில் மொத்த உதைப்பை நேரடியாகக் காணல் [§ 27(2) ஐப் பார்க்க].

(i). நுண்கணிதம் வழங்கி.



படம் 52

செவ்வகம் a, b என்னும் பக்கங்கள் உடையதாகுக. z ஆழத்தில் δz அகலமுள்ள ஒரு கிடைக கீலத்தை எடுத்து நோக்குக (படம் 52).

$\therefore$ கீலததின் பரப்பளவு $=a.\delta z$.

$\therefore$ கீலத்தில் உதைப்பு $=\rho.a\delta z.z$.

$\therefore$ செவ்வகத்தில் மொத்த உதைப்பு $=\int \rho az\,dz$;

இங்கு தொகையிடல் முழுச் செவ்வகத்திலுமுள்ள z இன் எல்லாப் பெறுமானஙகளையும் உட்கொள்ளும், அதாவது $z=k$ என்பதிலிருந்து $z=k+b$ எனபதுவரை.

$$\text{ஆயின், செவ்வகத்தில் மொத்த உதைப்பு} = \int_k^{k+b} \rho az\,dz.$$

$$= \left[\frac{\rho az^2}{2}\right]_k^{k+b}$$

$$= \frac{\rho a}{2}\left[(k+b)^2 - k^2\right]$$

$$= \frac{\rho a}{2}\left[2kb+b^2\right]$$

$$= \rho ab\left(k+\frac{b}{2}\right).$$

(ii). நுண்கணிதம் இல்லாது.

முன்போலச் செவ்வகப் பக்கங்கள் a, b ஆகுக. செவ்வகத்தை ஒவ்வொன்றும் l அகலமுள்ள கிடைக் கீலங்களாகப் பிரிக்க ; ஆயின் $nl=b$ ஆகும். nl என்றும் b இற்குச் சமமாகுமாறு நாம பின்னர் கீலத் தொகையை அதிகரித்து அவற்றின் அகலத்தைக் குறைப்போம். படம் 53 ஐப் பார்க்க. l குறைக்கப்பட, மிக மேலுள்ள கீலத்தில் உதைப்பு $\rho.al\left(k+\frac{l}{2}\right)$ என்னும் பெறுமானமாகும் ; ஏனெனின் ஆழம் $k+\frac{l}{2}$ ஆகும். இதே மாதிரி, இரண்டாவது கீலத்தின் ஆழம் எல்லைப் படுத்தப்படும் வகையில் $k+\frac{3l}{2}$ ஐ அணுகுவதால்

இரண்டாவது கீலத்தில் உதைப்பு $=\rho al\left(k+\frac{3l}{2}\right)$,

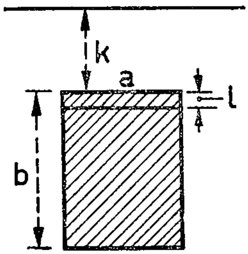
மூன்ருவது கீலத்தில் உதைப்பு $=\rho al\left(k+\frac{5l}{2}\right)$,

நாலாவது கீலத்தில் உதைப்பு $=\rho al\left(k+\frac{7l}{2}\right)$,

வேறும் இவ்வாறே.

இறுதியில்,

n ஆவது கீலத்தில் உதைப்பு$=\rho al\left[k+(2n-1)\frac{l}{2}\right]$.



படம் 53

ஆகவே எல்லாக் கீலங்களிலுமுள்ள உதைப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை

$$=\rho al\left(k+\frac{l}{2}\right)+\rho al\left(k+\frac{3l}{2}\right)+\ldots\ldots\ldots+\rho al\left(k+\overline{2n-1}\frac{l}{2}\right)$$

$$=\rho al\left[\left(k+\frac{l}{2}\right)+\left(k+\frac{3l}{2}\right)+\ldots\ldots\ldots+\left(k+\overline{2n-1}\frac{l}{2}\right)\right]$$

$$=\rho al\left[nk+\frac{l}{2}\left(1+3+5+\ldots\ldots\ldots+2n-1\right)\right]$$

$$=\rho al\left[nk+\frac{l}{2}n^2\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)};$$

ஏனென்ருல் $1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)$ என்பது n உறுப்புக்களுக்கு n^2 என்னுங் கூட்டுத்தொகையுள்ள கூட்டற்றொடராகும். ஆயின் $nl=b$ என்னும் நிபந்தனைக்கு உட்பட $n\to\infty$, $b\to 0$ ஆக இக்கோவையின் எல்லைப் பெறுமானம் பரப்பிலுள்ள மொத்த உதைப்பாகும்.

(i) தருவது

$$\text{மொத்த உதைப்பு} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \rho a \left[nl.k + \frac{n^2 l^2}{2} \right]$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \rho a \left[bk + \frac{b^2}{2} \right], \quad nl = b \text{ ஆதலால்,}$$

$$= \rho a \left(bk + \frac{b^2}{2} \right)$$

$$= \rho ab \left(k + \frac{b}{2} \right).$$

நுண்கணித முறை எளிதாகவும் வடிவாகவும் உள்ளதால் அதனை வழங்குவது இசைவாகும். அதிகாரம் V இல் திரவத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படும் பல்வேறு கேத்திரகணித உருவங்களின் அமுக்க மையங்களை அதாவது விளையுள் உதைப்புத் தாக்கும் புள்ளியைக் காண்போம் ; அங்கு நுண்கணித முறைகள் கூடுதலாகப் பொருந்தும்.

32. மொத்த உதைப்பின் வரைபுமுறைத் துணிபு

செய்முறை வேலையில் அதிகமாக ஒழுங்கற்ற வடிவுகொண்ட பரப்பில் மொத்த உதைப்பைக் காணவேண்டியிருக்கும். இங்கு புவியீர்ப்பு மையத்தின ஆழத்தைக் கணிப்பு முறையால் எளிதாய்க் காணவோ மொத்த உதைப்பை நேரடியாகக கணிக்கவோ முடியாது. இவ்வகையில் ஒரு வரைபுமுறையை வழங்குதல் இசைவாகும்.

செயன்முறை பின்வருமாறு :

ஒரு சதுரக்கோட்டுத் தாளில் அளவிடைப்படி படத்தை வரைக. (படம் 54). SS என்பது பாயிப் பரப்புக் கோட்டைக் குறிக்க, படத்தின் கீழ்ப் பரப்பிலிருந்து h ஆழத்தில் XX என்னும் ஒரு சமாந்தரக் கோட்டை வரைக. a_r நீளமும் l தடிப்பும் உள்ள AB என்னும் யாதும் ஒரு ஒடுங்கிய இடையான கீலத்தைப் பரப்பின் கீழ் z_r எனனும் ஆழத்தில் வரைக. XX என்னுங கோட்டை L,M என்பனவற்றில் வெட்டுமாறு செங்குத்துக்கள் வரைக. SS என்னும் பரப்புக் கோட்டில் O (முனைவு) என்னும் ஒரு புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுக்க. LO, MO என்பனவற்றைத் தொடுக்க. இவை AB என்பதை முறையே C, D என்பனவற்றில் வெட்டட்டும். இச் செய்கை ஒரு பெருநதொகையான இடைக் கீலங்களுக்குத் தொடர்ந்து செய்யப்படுமாயின் C, D என்பனவற்றிற்கு ஒத்த புள்ளிகளினது தொடர் ஒன்றைப் பெறுவோம். இப்புள்ளிகளைத் தொடுக்குமிடத்து கோடிட்ட படம் பெறப்படும். இக்கோடிட்ட படத்தின் பரப்பளவிலிருந்து (A_1) தொடக்கப் பரப்பளவில் உள்ள மொத்த உதைப்பு பெறப்படும். உண்மையில்

$$\text{தொடக்கப் பரப்பளவில் மொத்த உதைப்பு} = \rho A_1 h.$$

இதன் நிறுவல் பின்வருமாறு :

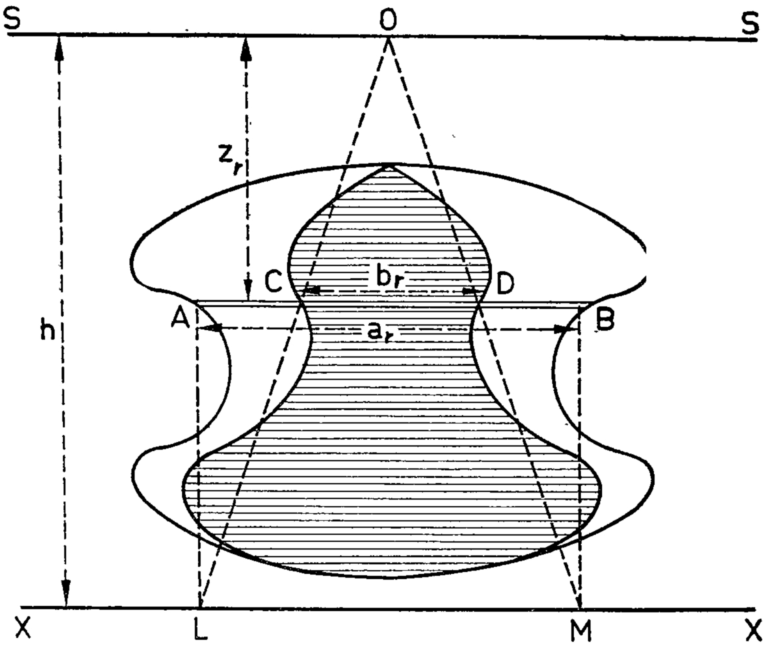
AB என்னும் கீலத்தின் பரப்பளவு $= a_r l$ அண்ணளவாய்.

$\therefore$ AB என்னுங் கீலத்தில் உதைப்பு $= \rho . a_r l . z_r$ அண்ணளவாய்.

$\therefore$ முற்றுய் n கீலங்கள் உண்டெனின்

பரப்பளவில் மொத்த உதைப்பு $= \underset{n \to \infty}{\text{எல்}} \sum_{r=1}^{n} \rho a_r l z_r$ செப்பமாய் ......(i).

$CD = b_r$ ஆகுக.



படம் 54

OCD, OLM எனனும் இயல்பொதத முக்கோணிகளிலிருந்து

$$\frac{CD}{z_r} = \frac{LM}{h},$$

அதாவது
$$\frac{b_r}{z_r} = \frac{LM}{h}$$

$$= \frac{a_r}{h}, \ a_r = AB = LM \text{ ஆதலால்}$$

$$\therefore \quad a_r z_r = h b_r$$

∴ (i) தருவது,

$$\text{பரப்பில் மொத்த உதைப்பு} = \text{எல்}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \rho l h b_r$$

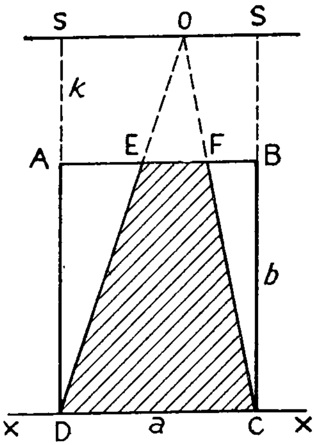
$$= \rho h \,\text{எல்}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} b_r l.$$

ஆனால் எல் $\sum_{r=1}^{n} b_r l$ ($n\to\infty$) என்பது கோடிட்ட பரப்பளவு (A_1) ஆகும்.

∴ பரப்பளவில் மொத்த உதைப்பு $= \rho h A_1$.

ஆகவே சதுரங்களை எண்ணி A_1 என்னும் பரப்பளவைக கண்டு h என்பதை அளத்தலால் பரப்பில் மொத்த உதைப்பைக் காணலாம். நாம் காட்டியவாறு பெறப்படும் கோடிட்ட பரப்பளவு தொடக்கப் பரப்பளவின் **முதற்பெற்ற படம்** எனக் கூறப்படும். கூடிய செம்மை வேண்டுமாயின் முதற் பெற்ற படத்தின் பரபபளவு **தளமானி** எனப்படும் கருவி மூலம் காணப்படும்.

தொடக்கப் படததின் வடிவு (சமச்சீரோ அல்லவோ) எதுவாயினும் O என்னும் புள்ளி SS என்னுங் கோட்டில் எங்கு தேரப்படுவதாயினும் இம்முறை வலிதாகும் ; இதற்குக் காரணம் OCD, OLM என்னும் முக்கோணிகள் என்றும் இயல்பொத்தனவாகும் எனபதே.



படம் 55

நாம் இங்கு வழங்கிய வரைபுமுறை ஒரொழுஙகற்ற உருவத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையைக காண்பதற்கும் இசைவானது என்பதைக் கவனித்தல் பயன்படும் ; ஏனெனின் அதன் பரப்பளவு A_0 என்பதும் பரப்பின் கீழ் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் $\bar{z}$ என்பதுமாயின் § 26 இலிருந்து உருவத்தில் மொத்த உதைப்பு $= \rho A_0 \bar{z}$

$= \rho A_1 h$ முன்போல.

$$\therefore \quad A_0 \bar{z} = A_1 h$$

$$\therefore \quad \bar{z} = \frac{A_1 h}{A_0}$$

$$\text{அல்லது} \quad = \frac{\text{முதறபெற்ற படத்தின் பரப்பளவு}}{\text{தொடக்கப் படத்தின் பரப்பளவு}} \times h.$$

உதாரணம் 1. தன் மேலோரம் கிடையாக h ஆழத்தில் இருக்குமாறு நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் செவ்வகத்தில் மொத்த உதைப்பைக் காண்க.

உள்ளாழ்த்தப்பட்ட தொடக்க உருவம் கிடையான அல்லது நிலைகுத்தான ஓரங்களை உடையதாயின் முதற்பெற்ற உருவம் ஒரு நேர்ப்பக்கப்

பல்கோணியாகும் ; இவ்வுண்மையை ஒரு செவ்வகத்தில் உள்ள மொத்த உதைப்பைத் துணிதற்கு நாம் வழங்கலாம். வேறு முறையில் மொத்த உதைப்பு இசைவாகக் காணமுடியாத பரப்பளவுகளுக்கு இவ்வரைபு முறை பிரயோகிக்கப்படலாமென்பதே இதன் சிறப்பாகும். ஆனல் இவ் வுதாரணம் இம்முறையை உறுதிப்படுத்தற்குப் பயன்படும்.

ABCD (படம் 55) என்பது மேற்காட்டப்படுவதுபோல் a, b என்னும் பக்கங்கள் உள்ள செவ்வகம் ஆகுக. SS என்னும் பரப்புக் கோட்டில் **O** (முனைவு) யாதும் ஒரு புள்ளியாகுக. ஆயின் **EFCD** என்னுங் கோடிட்ட உருவம் முதற்பெற்ற உருவம் ஆகும். இது ஒரு சரிவகம் ஆதலால் அதன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}(\text{EF}+\text{CD})\,b$ ஆகும் ; **OEF, ODC** என்னும் இயல்பொத்த முக்கோணிகளிலிருந்து.

$$\frac{\text{EF}}{k}=\frac{\text{CD}}{b+k}.$$

$$\therefore\quad \text{EF}=\frac{ak}{b+k}.$$

முதற்பெற்ற உருவத்தின் பரப்பளவு $=\frac{1}{2}b\left(a+\dfrac{ak}{b+k}\right)$

$$=\tfrac{1}{2}ab\left(\frac{b+2k}{b+k}\right).$$

$\therefore$ ABCD என்னுஞ் செவ்வகத்தில் மொத்த உதைப்பு

$$=\rho\,(b+k).\ \tfrac{1}{2}ab\left(\frac{b+2k}{b+k}\right)$$

$$=\rho\,ab\left(k+\frac{b}{2}\right);$$

இது § 27 (2) இன் முடிபோடு பொருந்தும்.

பயிற்சி IV

1. 150 அடி ஆழ நீருள்ள செவ்வக சேமிப்புக் கலனின் நிலைக்குத்துச் சுவரினது ஓரடி அகலத்தில் உள்ள உதைப்பை இருத்தல் நிறையிலே துணிக.

2. 10 அடி அகலமும் 10 அடி ஆழமும் உள்ள பூட்டுப்படலையின் ஒருபக்கத்தில் 8 அடி ஆழமுள்ள நீரும் மற்றைப் பக்கத்தில் 5 அடி ஆழமுள்ள நீரும் உண்டு. ஒவ்வொரு வகையிலும் படலையின் கீழ் ஓரத்திலிருந்து ஆழம் அளக்கப்படும். விளையுள் உதைப்பைத் துணிக.

3. கடல் நீரில் 25 அடிக்கு உள்ளாழத்தப்படும் 50 அடி அகலமுள்ள நிலைக்குத்துச் செவ்வக நீர்ப்படலையின் ஒரு பக்கத்தில் மொத்த உதைப்பைத் துணிக ; கடல் நீரின் தன்னீர்ப்பு 1·026 எனத் தரப்படும்.

4. 1 அடி ஓரமுள்ள சதுரமுகி அதன் மேல் முகம் பரப்பின்கீழ் $2\frac{1}{2}$ அடி ஆழத்தில் கிடையாக இருக்குமாறு தொங்கவிடப்படும். சதுரமுகியின் ஒவ்வொரு முகத்திலும் திரவ உதைப்பைக் காண்க.

5. $\frac{1}{4}$ மைல் நீளமும் 100 யார் அகலமுள்ள ஒரு செயற்கை ஏரி ஒரு முனையிற் பூச்சிய ஆழமும் மற்றை முனையில் 88 அடி ஆழமுமாகுமாறு அதன் அடி படிப்படியாகச் சரிவு கொள்ளும் ; ஆழமான முனையில் அதன் முழு அகலத்திற்குக் குறுக்காக ஒரு கற்கட்டுச் சுவரால் அது அடைக்கப்பட்டுள்ளது. கன யாருக்கு $\frac{3}{4}$ தொன் நிறையுள்ள நீரால் ஏரி நிரப்பப்படுமிடத்து சுவரில் மொத்த உதைப்பைக் காண்க. அதோடு ஏரியிலுள்ள நீரின் மொத்த நிறையையும் காண்க.

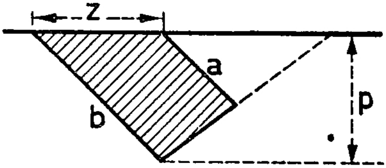
6. ஒரு பொட் கூம்பு அதன் அடி ஒரு கிடையான மேசையிலே இருக்குமாறு வைக்கப்படும். அடியின் பரப்பளவு a சதுர அங்குலமும் உயரம் h அங்குலமுமாகும். கூம்பின் நிறை அது கொள்ளும் நீரின் நிறைக்குச் சமமாகும். நீரால் நிரப்பப்படுமிடத்து அடியிலே தாக்கும் நீருதைப்பு மேசையிலே தாக்கும் அடியின் உதைப்போடு கொள்ளும் விகிதம் யாது ?
(ஒரு கூம்பின் கனவளவு அதே அடியும் குத்துயரமுமுள்ள உருளையின் மூன்றில் ஒன்றாகும்).

7. அடியிலே திறந்த ஒரு செவ்வட்டக் கூம்புக்கு உச்சியில் ஒரு சிறு துளை உண்டு ; அடியின் விட்டம் 1 அடியும் கூம்பின் உயரம் 2 அடியும் ஆகும் ; இக்கூம்பு ஒரு கிடைத் தளத்திலே ஓய்விலிருக்கும். அதனைத் தளத்திலிருந்து உயர்த்தாது மட்டாய் நீரால் நிரப்புதல் சாத்தியமாதற்குக் கூம்பின் நிறையைக் காண்க.

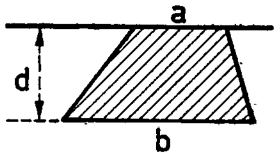
8. திரவம் கொண்ட ஒரு பாண்டத்தின் பரப்பு $a_1, a_2, a_3,$ .... என்னும் பரப்பளவுகள் கொண்ட ஒரு தொகை தளமுகங்களால் ஆக்கப்படும். இப் பரப்பளவுகளின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் திரவப் பரப்பின் கீழ் $z_1, z_2, z_3,$ ...... என்னும் ஆழங்களிலிருக்கும். திரவத்தினுடைய அலகுக் கனவளவின் நிறை w வாயின் பல முகங்களிலுள்ள விளையுள் உதைப்புகளின் கூட்டுத்தொகையை எழுதிக்கொண்டு, இக்கூட்டுத்தொகை முழுப் பாண்டப் பரப்பளவினதும் இப்பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்திலுள்ள அமுக்கச் செறிவினதும் பெருக்கத்திற்குச் சமமாகுமெனக் காட்டுக.

9. ஒரு நீர்க் குழாயின் ஒரு முனை ABCD என்னும் ஒரு நீர் போகாத சதுரத் தட்டால் அடைக்கப்படும். இதன் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் AB யானது நீர்ப்பரப்பிலும் இருக்கும். எவ்வாறு A யிற்கூடாக வரையப்படும் ஒரு கோட்டால் இத்தட்டைச் சம உதைப்புகள் உள்ள இரு பாகங்களாகப் பிரிக்கலாமெனக் காட்டுக. *(Inter Eng.)*

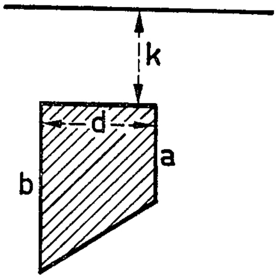
10. கீழே தரப்படும் நாலு வகைகள் ஒவ்வொன்றிலும் அடரானது ρ அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். தந்த கணியங்கள் பற்றி அடரின் ஒரு பக்கத்தில் மொத்தத் திரவ உதைப்பைக் காண்க.



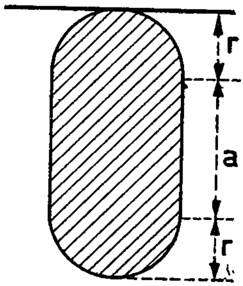
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

ஒவ்வொரு வகையிலும் $a=0$ ஆகுமிடத்து மொத்தத் திரவ உதைப்பை உய்த்தறிந்து கொண்டு இம் முடிபுகள் § 27 இற் பெறப்பட்டனவற்றோடு பொருந்தும் என உறுதிப் படுத்துக.

11. ஒரு நீச்சற்குளம் 100 அடி நீளமும் 30 அடி அகலமுமாய் உள்ளது. ஆழங் குறைந்த முனையில் ஆழம் 3 அடி ஆகி கூடுதலாக ஆழமுள்ள முனையில் ஆழம் 12 அடி ஆகும்; இவற்றிற்கிடையில் ஆழம் சீராய் அதிகரிக்கும். 4 கன யார் நீர் 3 தொன் நிறை யெனத் தரப்படுமாயின் அடியிலும் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் மொத்த உதைப்பைத் தொன் நிறையிற் காண்க.

12. AD பரப்பிலிருக்குமாறு ABCD என்னுஞ் செவ்வகம் ஒரு திரவத்தில் உள்ளாழ்த்தப் படும். ADP, PDQ, QDB என்னும் முக்கோணிகளில் திரவத்தால் உஞற்றப்படும் உதைப்புக்கள் சமமாகுமாறு AB என்பது P, Q என்பனவற்றிற் பிரிக்கப்படும். AP : PQ : QB என்னும் விகிதங்களைக் காண்க. (*High. Sch. I.*)

13. ஒரு நீச்சற்குளம் 90 அடி நீளமுள்ளது. கூடிய ஆழமுள்ள முனையில் அது 9 அடி ஆழமாகி ஆழங் குறைந்த முனையில் அது 2 அடி 6 அங். ஆழமாகும். அதன் அடியானது ஆழங் குறைந்த முனையிலிருந்து முதல் 45 அடி நீளத்திற்கு உறுதியாய்க் கீழ்முகமாகச் சரிவுகொண்டு அதன் பின்னர் 6 அடி ஆழத்தில் ஆழ்முனையிலிருந்து 20 அடிவரை கிடையாகும். அதன் பின்னர் அடி நிலைக்குத்தாய் 9 அடி ஆழத்திற்கு வீழ்ந்து ஆழ் குளத்தை ஆக்கும். 1 கன அடி நீர் 62·5 இரு. நிறையாகுமெனக் கொண்டு குளத்தின் ஒரு பக்கத்தின்மீது உதைப்பைத் தொன் நிறையிற் காண்க.

(*High. Sch. I.*)

14, ABC என்பது AB பரபபிலிருககுமாறு திரவததில் நிலைககுத்தாய் உள்ளாழத் தப்படும ஒரு முககோணி அடராகும். P, Q, எனபன ABP, APQ, AQC எனனும் முககோணிகளில திரவ உதைப்புக்கள் சமமாகுமாறு BC யிறகுள்ள புள்ளிகளாகும். BP : BQ : BC $=1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ எனக காட்டுக.

PE யானது BA என்பதை E யிற சந்திககுமாறு CA எனபதறகுச சமாநதரமாக வரையப்படுமாயின் EBP எனனும முககோணியிலுள்ள திரவ உதைபபு ABC எனனும் முககோணியிலுள்ள திரவ உதைபபுககுக கொளளும் விகிதத்தைக காணக.

(*Inter. Eng.*)

15. 1 அடி ஓரமுளள ஒரு சதுரமுகி அதன ஓா ஓரம் பரபபிலும இவ்வோரத்திற சந்திககும முகஙகள ஒவவொனறும நிலைககுததோடு 45° சாய்விலும் இருககுமாறு நீரில் உள ளாழ்த்தப்படும். சதுரமுகியின முகஙகள ஒவவொன்றிலும் நீருதைப்பின் பருமனையும முழுச சதுரமுகியிலும் விளையுள உதைபபையுங காணக. நீரின் அடாத்தி கன அடிககு 62·5 இரு, எனக் கொள்க. (*High. Sch. I.*)

16. ஒரு சதுரமுகி W நிறையுளள திரவத்தால நிரபபப்பட்டு ஒரு மூலைவிட்டம் நிலைககுததா குமாறு பிடிககபபடும ; கீழ் முகமொன்றிலும மேல் முகமொன்றிலும் மொத்தத திரவ உதைபபைக் காணக.

17. ஒரு நீரத்தேககததின நிலைககுததுச சுவா ஒனறில இரு வட்டஙகள வரையப்படும. அவை ஒன்றையொனறு வெளியே தொட ஒனறின மையம் மறறையதன் மையததிறகு நிலைக்குததாயக கீழாகும. தேககத்திலுளள நீரானது மேலவட்டம் மட்டாய் உள் ளாழ்த்தப்படுமாறு உயரும. இரு வட்டஙகளிலும் விளையுள அமுக்கஙகள சமமாகு மிடத்து ஆரைகளின விகிதத்தைக் காணக.

18. ஓரடைதத சதுரமுகிப் பாண்டம் திரவத்தைக கொண்டுள்ளது. இரு முகங்களின் ஒரு மூலைவிட்டம் நிலைக்குததாகுமாறும, திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பு நிலைககுத்து முகங களின இரு மேல ஓரஙகளை இருகூறிடுமாறும இப்பாண்டம் பிடிககப்படும. W எனபது கொள்ளபபடுந திரவத்தின் நிறையாயின் நிலைககுத்தான முகம ஒன்றில திரவ உதைப்பு $\dfrac{25\sqrt{2}}{84}$W என நிறுவுக. (*Inter. Eng.*)

19. 4 சதுர அடி பரபபளவு கொணட ஒரு முக்கோணி அடா அதன உசசிகள் நீரின் கீழ முறையே 1 அடி, 2அடி, 3 அடி ஆழத்திலிருககுமாறு உள்ளாழ்ததபபடும். வளிமணடல அமுககம் சதுர அங்குலத்திற்கு 14·7 இரு. ஆயின பரபபளவில மொதத உதைபபைக் காணக.

20. கன அடிககு ρ இரு. அடர்த்தியும் a அடி ஆழமுமுளள ஒரு திரவப்படை 2ρ அடாத்தியும் $2a$ யிலும் பெரிய ஆழமுள்ள திரவப்படையில மீபொருததபபடும. $2a$ பக்கமுளள ஒரு சதுர அடா அதன மேலோரம (i) சுயாதீனப் பரப்பிலிருக்குமாறு (ii) இரு திரவஙகளின பொதுப பரபபிலிருககுமாறு நிலைககுததாய் உளளாழததப்படும. ஒவ்வொரு வகையிலும் அடரில மொததத் திரவ உதைப்பைக காணக.

21. நீரும எணணெயும் (தனனீர்ப்பு 0·9) கொணட ஒரு பாணடததின நிலைக்குத்தான முகம் ஒனறில இரு நிலைககுததான பக்கஙகளையுடைய ஒரு செவ்வகம் வரையபபடும். எணணெய், நீர் எனபனவற்றின பொதுப பரப்பால இரு பாகஙகளாகப் பிரிககப்படு மாறு இச்செவவகம் மட்டாய் மூடபபடும. இவவிரு பாகஙகளிலும் திரவ உதைப்புக கள் சமமாயின் எண்ணெயின் ஆழம் செவவகததின் உயரததிறகுக கொளளும் விகி தத்தைக் காணக.

22. 3 அங்குல பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணியின் ஒரு பக்கம் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். (முன்னதன் அடர்த்தியின் அரைப் பங்கு அடர்த்தியுள்ள) வேறொரு திரவம மீபொருத்தப்படுமிடத்து முக்கோணியில் மொத்தத் திரவ உதைப்பு தொடகக உதைப்பிலும் இரு மடங்காகுமாயின் பின்ன தான திரவததின் ஆழத்தைக காண்க.

23. 27 இன் (3), (4), (5), (6), (8) என்னும் வகைகளின் முடிபுகளை தொகையீட்டு முறை யில் சரி பார்க்க.

24. 3 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு வட்ட அடர் அதன மையம் 4 அங்குல ஆழத்திலிருக்குமாறு கன அஙகுலத்திற்கு ρ இரு. அடாத்தியுள்ள திரவத்தில நிலைகுத்தாய் உள்ளாழ்த்தப் படும். அடரில மொத்தத் திரவ உதைப்பை வரைபு முறையிற கண்டு இம் முடிபை § 27 இன் (7) வது வகையோடு ஒப்பிடுக.

25. அசசு நிலைக்குத்தாகவும் அடி கீழ் முகமாகவும் உள்ள ஒரு பொட் கூம்பு 3 :1 என்னும் விகிதத்திலுள்ள அடர்த்திகள் கொண்ட இரு திரவங்களின சம கனவளவு களால் நிரப்பப்படும். அடியில் மொத்தத திரவ உதைப்பு, பாண்டம் குறைந்த அடாத் தியுடைய திரவத்தால் நிரப்பப்படுமிடத்து உள்ளதிலும் $(3-\sqrt[3]{4})$ மடங்கு பெரிதாகு மென நிறுவுக.

26. ABC எனனும் முக்கோணி A எனனும் உச்சி பரப்பிலும் BC என்னும் அடி h ஆழத்திற் இடையாகவும் இருக்குமாறு நீரில் நிலைகுத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். இப்பரப்பளவை சமஉதைப்புககள் உள்ள n கீலங்களாக எவ்வாறு இடைக்கோடுகளாற் பிரிக்கலாமெனக் காட்டுக.

விடை

1. 703, 125.
2. 5·441 தொன நிறை.
3. 447·3 தொன் நிறை, ஏறக்குறைய.
4. 2500 அவு.நிறை, 3000 அவு. நிறை, 3500 அவு.நிறை.
5. $32{,}266\frac{2}{3}$ தொன் நிறை, 484,000 தொன நிறை.
6. 3 : 2.
7. 65·45 இரு.
9. A யிற் கூடாகவுள்ள கோடு அடியை E யில் வெட்டுமாயின் ED $=0\cdot686a$; a யானது சதுரத்தின பககமாகும்.
10. (i) $\rho p^2 \cdot (a^2+ab+b^2)\ /\ 6b^2$; (ii) $\rho d^2\ (a+2b)\ /\ 6$: (iii) $\rho d\ [a^2+ab+b^2+3k\ (a+b)]\ /\ 6$ (iv) $\rho r\ (2r+a)(\pi r+2a)\ /\ 2$.
11. அடி 627·47 ; முனைகள் 3·75, 60 ; பக்கம் 87·5.
12. $1: \sqrt{2}-1 : \sqrt{3}-\sqrt{2}$
13. 47·135 தொன் நிறை.
14. $1 : 3\sqrt{3}$.
15. மேல முகங்கள : 22·097 இரு. நிறை ; கீழ் முகங்கள் : 88·388 இரு. நிறை ; நிலைக் குத்து முகஙகள் : 44·194 இரு. நிறை. விளையுள் உதைப்பு 62·5 இரு. நிறை மேலமுகமாக நிலைக்குத்தாய்.
16. $2W\ /\ \sqrt{3}$, $W\ /\ \sqrt{3}$.
17. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) : 1$ அல்லது 1·62 : 1.
19. 8967·2 இரு. நிறை.
20. (i) $5\,\rho a^3$ இரு. நிறை (ii) $12\,\rho a^3$ இரு. நிறை,
21. 0·71 : 1.
22. $\sqrt{3}$அங்.
24. $113\cdot1\,\rho$ இரு. நிறை.
26. கோடுகள $h\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}, h\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{3}}, \ldots\ldots, h\left(\frac{r}{n}\right)^{\frac{1}{3}}, \ldots$ என்னும் ஆழங்களிலுள்ளன

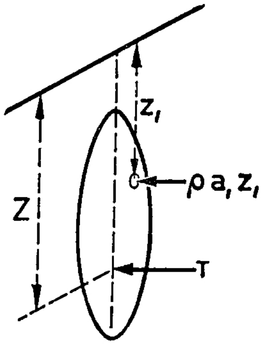
அதிகாரம் V

பாரமான பாயிகளின் அமுக்கம் (3)

அமுக்க மையம்

33. அமுக்க மையத்தின் நிலையைக் காணும் முறை

ஒரு பாயியில் உள்ளாழ்த்தப்படும் தளப்பரப்பளவின் அமுக்க மையமானது விளையுள் உதைப்பு அப்பரப்பளவைச் சந்திக்கும் புள்ளியாகுமென வரைவிலக்கணங் கூறியுள்ளோம். பரப்பளவில் மொத்த உதைப்பைக் காண்பதற்குப் பரப்பினுடைய புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலை பிரயோகிக்கப் படக்கூடுமெனினும் மொத்த உதைப்பின் பருமனுக்குச் சமமான ஒன்றிவிசை, அதாவது விளையுள் உதைப்பு, புவியீர்ப்பு மையத்திலே தாக்காதெனவும் பரப்பளவு இடையாலன்றி புவியீர்ப்பு மையத்திலுங் கூடுதலான ஆழத்திலுள்ள அமுக்க மையத்திலே தாக்குமெனவும் தெளிவாக விளங்கிக் கொள்ளப்பட வேண்டும். (§ 42 ஐப் பார்க்க).



படம் 56

யாதும் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையில் அமுக்க மையத்தைத் துணிதற்கான பொதுக் கோட்பாடு பின்வருமாறு :

படம் 56 ஆனது ρ அடர்த்தியுள்ள பாரமான ஏகவினப் பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் தளப் பரப்பளவைக் குறிக்க. ஆயின் § 26 இன் குறிப்பீட்டின்படி a_1 ஆனது z_1 ஆழத்திலுள்ள சிறு மூலகப் பரப்பளவைக் குறிக்குமாயின்

இம் மூலகத்தில் பாயியினால் மட்டும் ஆய உதைப்பு $= \rho_1 a_1 z_1$, அண்ணளவாய்.

ஆகவே பரப்பளவில் பாயியினாலேயே ஆய உதைப்பு $=$ எல் $\sum_{r=1}^{n} \rho a_r z_r$, ($n \to \infty$) செப்பமாய்.

$$= \rho \text{ எல்}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} a_r z_r ,\ \rho \text{ ஒரு மாறிலியாதலால்.}$$

இவ்வெல்லையே அமுக்க மையத்திலே தாக்கும் (பெரிய அம்பாற் காட்டப்படும்) விளையுள் உதைப்பின் பருமனுக்குச் சமமாகும். இது ஒரு தொகை

சமாந்தர விசைகளின் விளையுள் ஆதலால அதன் ஆழம் Z ஐக் காண்ப தற்குப் பரப்பின் அதே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் பாயிப் பரப்பளவின் மீதுள்ள கோடுபற்றி அதன் திருப்பதனைக் கண்டு அதே கோடுபற்றி அதனை ஆக்கும் விசைகளினது திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமப்படுத்து வோம்.

பரப்பளவின் ஒரு பக்கத்திலுள்ள விசைகளை மட்டுமே எடுத்து நோக்கு கிறோம் என்பதை ஞாபகப்பகத்தில் வைததிருக்க.

ஆயின், பாயிப் பரப்புப்பற்றி மூலக உதைப்பின் திருப்பம்

$$=\rho a_1 z_1 . z_1 , \quad \text{அண்ணளவாய்,}$$

$$=\rho a_1 z_1^2 , \quad \text{அண்ணளவாய்.}$$

ஆகவே, எல்லா மூலக உதைபபுக்களினது திருப்பக் கூட்டுத்தொகையின் எல்லை

$$=\rho \text{ எல்}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} a_r z_r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

விளையுள் உதைப்பின் திருப்பம்

$$=Z\times\rho \text{ எல்}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} a_r z_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

(i), (ii) என்பனவற்றைச் சமப்படுத்த

$$Z\times\rho \text{ எல்}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} a_r z_r=\rho \text{ எல்}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} a_r z_r^2 .$$

$$\therefore \quad Z=\frac{\text{எல்}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} a_r z_r^2}{\text{எல்}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} a_r z_r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

ஆகவே, சமன்பாடு (iii) ρ என்பதைக் கொள்ளாததால் பாயி ஏகவின மாயின அமுக்க மைய ஆழம பாயியின் அடர்த்தியைச் சாராது.

அமுக்க மையத்தின் ஆழம் துணியப்பட்ட பின்னர் அமுக்க மையம் கிடக்க வேண்டிய கிடைக்கோடு எமக்குத் தெரியும். இக்கோட்டில் அதன் நிலையைக் காண்பதற்கு நாம் ஒரு புதிய அச்சை எடுத்து இவ்வச்சுப்பற்றி எல்லா மூலக உதைப்புக்களின் திருப்பக் கூட்டுத்தொகையினது எல்லையைக் கண்டு கொண்டு இதனை மொத்த உதைப்பு, அமுக்க மையத்தின் புதிய அச்சுத் தூரம் என்பனவற்றின் பெருக்கத்துக்குச் சமமாக்கலாம். ஒவ்வொரு கிடைக் கீலத்தையும இருகூறிடுமாறு உருவத தளத்தில் ஓர் ஒன்றி நேர்கோடு வரையத்தக்க வகைகளில் இச் செயன்முறை விலக்கப்படலாம். ஆயின் இக்கோடு ஒரு சமச்சீர் அச்சாகி அமுக்க மையம் அதிலே கிடக்கும்.

இப் பொது வகையில் பரப்பு நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ள தென உத்தேசித்தோம் என்பது கவனிக்கப்பட்டிருக்கலாம். இச்செயலால் பொதுமைப்பாட்டுக்குக் கேடு இல்லையென்பது பின்னர் (§ 39) நிறுவப் படும்.

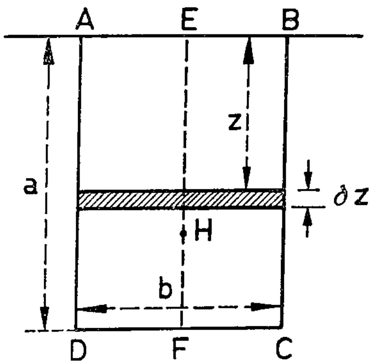
ஆகவே யாதும் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையில் அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைத் (Z) துணிதற்கு நோக்கிலுள்ள பரப்புக்கு (iii) இன் வலதுகைப் பக்கத்தை நாம் கணிக்க வேண்டும். நுண்கணிதம் வழங்கலே இது செய்தற்கு மிக எளிய முறை. ஆனால் நுண்கணிதம் வழங்காமலும் இது செய்யப்படலாம். அன்றியும் எளிய வகைகளில் எளிதாகப் பிரயோகிக்கத்தக்க ஒரு கேத்திர கணித முறையும் உண்டு.

இரண்டு எளிய வகைகளில் மேலே காட்டிய மூன்று முறைகள் ஒவ் வொன்றாலும் அமுக்க மையத்தின் நிலையைக் காண்போம்.

34. நுண்கணிதம் வழங்கி அமுக்க மையங்கள்

உதாரணம் 1. ஒரு பக்கம் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த் தப்படும் செவ்வகத்தினது அமுக்க மையத்தின் நிலையைக் காண்க.

பாயியின் அடர்த்தி ρ ஆகுக. ABCD (படம் 57) ஆனது a, b என்னும் பக்கங்கள் உள்ள செவ்வகத்தைக் குறிக்குமாயின், z ஆழத்தில் δz அகலமுள்ள மூலகத்தை எடுத்து நோக்குக.



படம் 57

மூலகத்தின் பரப்பளவு $= b.\delta z$.

மூலகத்தில் உதைப்பு $= \rho b.\delta z.z$.

$\therefore$ AB பற்றி மூலகத்திலுள்ள உதைப்பின் திருப்பம் $= \rho b.\delta z.z.\times z.$

$= \rho b z^2 \delta z.$

$\therefore$ அத்தகைய மூலகங்கள் எல்லா வற்றினதும் மொத்தத் திருப்பம்

$$= \int_0^a \rho b z^2 \, dz.$$

செவ்வகத்தில் மொத்த உதைப்பு $= \int_0^a \rho b z \, dz.$

ஆயின், Z என்பது பரப்பின் கீழ் அமுக்க மையத்தின் ஆழமாயின்

$$Z \times \int_0^a \rho b z \, dz = \int_0^a \rho b z^2 \, dz.$$

$$\therefore \quad Z = \frac{\int_0^a \rho b z^2 dz}{\int_0^a \rho b z dz}$$

$$= \frac{\rho b \int_0^a z^2 dz}{\rho b \int_0^a z dz}$$

$$= \left[\tfrac{1}{3} z^3\right]_0^a \Big/ \left[\tfrac{1}{2} z^2\right]_0^a$$

$$= \tfrac{1}{3} a^3 / \tfrac{1}{2} a^2$$

$$= \tfrac{2}{3} a.$$

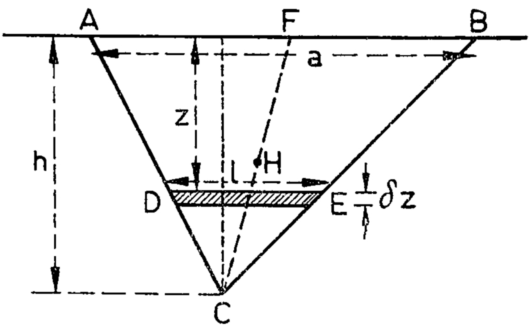
ஆகவே E, F என்பன முறையே AB, CD என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாயின், EF என்பது ஒரு சமச்சீர்க் கோடாகி அமுக்க மையம் அதன் மீது இடத்தலால் அமுக்க மையத்தின் நிலை (H)

$$EH = \tfrac{2}{3} EF$$

$$= \tfrac{2}{3} a$$

என்பதாலே தரப்படும்.

உதாரணம் 2. ஒரு பக்கம் பரப்பிலிருக்குமாறு நிலைக்குத்தாய் ஒரு பாயியில் உள்ளாழ்த்தப்படும் முக்கோணியினது அமுக்க மையத்தின் நிலையைக் காண்க.



படம் 58

பரப்பிலுள்ள பக்கம் (AB) a நீளமும், உச்சி (C) பரப்பின் கீழ் h ஆழத்திலும் இருக்க (படம் 58).

z ஆழத்தில் δz அகலமும் l நீளமும் உள்ள ஒரு மூலகத்தை (DE) எடுத்து நோக்குக.

மூலகத்தின் பரப்பளவு $= l.\delta z$.

மூலகத்தில் உதைப்பு $= \rho l.\delta z.z$ ....(i).

AB பற்றி மூலகத்திலுள்ள உதைப்பின் திருப்பம் $= \rho l.\delta z.z^2$.

$\therefore$ அத்தகைய மூலகங்கள் எல்லாவற்றினதும் மொத்தத் திருப்பம்

$$= \int_0^h \rho l z^2\, dz \quad \text{......................(ii)}$$

ஆனால் முக்கோணியில் மொத்த உதைப்பு $= \int_0^h \rho l z\, dz$, (i) இலிருந்து

$$\therefore \quad Z \times \int_0^h \rho l z\, dz = \int_0^h \rho l z^2\, dz \text{......................(iii)}$$

இந்நிலையில் முக்கியமாய்க் கவனிக்கப்பட வேண்டிய அம்சம் என்னவெனில், l ஆனது ஒவ்வொரு மூலகக் கீலத்திற்கும் மாறிலியாகாதாகையால் அதனைத் தொகையீட்டுக் குறிக்கு வெளியே எடுக்க முடியாதென்பதே. உண்மையில் l ஆனது z ஒடு மாறுதலால் தொகையிட முன்னர் z இன் சார்பாய் l இற்கு ஒரு கோவை நாம் பெற வேண்டும். ஈற்று உதாரணத்தில் b யானது ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் மாறிலியாதலால் அதனை நாம் தொகையீட்டுக் குறிகளுக்கு வெளியே எடுக்க முடியும். இவ்விரண்டு உதாரணங்களிலும் கவனிக்கப்பட வேண்டிய மற்றொரு அம்சம் என்னவெனில், தொகையீட்டுக்குரிய எல்லைகளாவன எடுத்து நோக்கப்படும் முழுப் பரப்பளவையும் உள்ளடக்குமாறு எடுக்கப்படும் z இன் பெறுமானங்கள் என்பதாகும்.

ஆயின், (iii) ஆம் சமனபாட்டைக் கொண்டு மேலும் தொடர முன்னர், l என்பதை z உம் மாறிலிகளும் கொண்ட ஒரு சார்பாய் நாம் பெறுவோம்.

DEC, ABC என்னும் முக்கோணிகள் இயல்பொத்தன ;

$$\therefore \quad \frac{DE}{h-z} = \frac{AB}{h}, \quad \text{அதாவது} \quad \frac{l}{h-z} = \frac{a}{h}.$$

$$\therefore \quad l = \frac{a}{h}(h-z).$$

ஆயின் (iii) தருவது

$$Z \times \int_0^h \frac{\rho a}{h}(h-z)\, z dz = \int_0^h \frac{\rho a}{h}(h-z)\, z^2 dz.$$

$$\therefore \quad Z = \frac{\frac{\rho a}{h}\int_0^h (hz^2 - z^3)\, dz}{\frac{\rho a}{h}\int_0^h (hz - z^2)\, dz};$$

ρ, a, h என்பன எல்லாம் மாறிலிகள் ஆதலால் $\frac{\rho a}{h}$ என்பது ஒவ்வொரு தொகையீட்டுக்கும் வெளியே எடுக்கப்படும்.

ஆகவே தொகையிட

$$Z = \left[\frac{hz^3}{3} - \frac{z^4}{4}\right]_0^h \Big/ \left[\frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^h$$
$$= (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4})h^4 / (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3})h^3$$
$$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}h$$
$$= \tfrac{1}{2}h \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

F ஆனது AB யின நடுப்புள்ளியாயின் CF என்னும் இடையம் ஒவ்வொரு கிடைக்கோட்டையும் இருகூறிடுதலால் அமுக்க மையம் (H) CF என்பதிற் கிடக்கும். H இன் ஆழம்

$$Z = \tfrac{1}{2}\ h$$

என்பதாலே தரப்படுதலால் இயல்பொத்த முக்கோணிகளிலிருந்து H இன் நிலை

$$FH = \tfrac{1}{2}FC$$

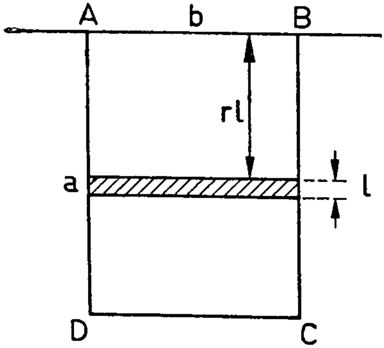
என்பதாலே தரப்படும்.

செவ்வகத்திற்கும் முக்கோணிக்கும் உரிய முடிபுகள் ஞாபகத்தில் இருக்க வேண்டும்; அவற்றை இப்போது நுண்கணிதம் வழங்காது நிறுவுவோம். (§ 31 ஐ ஒப்பிடுக).

35. நுண்கணிதம் வழங்காது அமுக்க மையங்கள்

உதாரணம் 1. ஒரு பக்கம் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் செவ்வகத்தினது அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

பாயி ρ அடர்த்தி உடையதாகுக. ABCD (படம் 59) செவ்வகத்தைக் குறிக்குமாயின் அதனை $nl = a$ ஆகுமாறு l அகலமுள்ள கீலங்களாகப் பிரிக்க. இறுதியில் $n \longrightarrow \infty$, $l \longrightarrow 0$ ஆகவேண்டுமாதலால் n ஒரு பெரிய முழு எண் எனவும் l ஒரு சிறு கணியமெனவும் கவனிக்கப்பட வேண்டும்.



படம் 59

வகைக் கீலமொன்றை rl ஆழத்தில் எடுத்து நோக்குக. ஆயின், l சிறிதாயின் நாம் அண்ணளவாகப் பெறுவன

கீலத்தில் உதைப்பு $= \rho.bl.rl$ ....(i),

கீலத்திலுள்ள உதைப்பின் திருப்பம் $= \rho.bl.(rl)^2$ ....(ii).

(i) இலிருந்து எல்லாக் கீலங்களுக்கும் கூட்டல் செய்துகொண்டு $nl = a$ என்னும் நிபந்தனைக்கு உட்பட $n \longrightarrow \infty$, $l \longrightarrow 0$ ஆகுமிடத்து எல்லை யெடுத்தலால் செவ்வகத்தில் மொத்த உதைப்பைப் பெறுவோம். (ii) இற்கும் இதே மாதிரிச் செய்ய எல்லா உதைப்புக்களினதும் மொத் தத் திருப்பம் துணியப்படும்.

ஆயின் (i) இலிருந்து

$$\text{செவ்வகத்தில் மொத்த உதைப்பு} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \rho b l^2 (1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots\dots + n)$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \rho b l^2 \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \rho b.\frac{a^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \text{எல்}\ \rho b\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{\rho b a^2}{2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\text{(iii)}.$$

அன்றியும் (iii) இலிருந்து, செவ்வகத்திலுள்ள உதைப்புக்கள் எல்லா வற்றின் மொத்தத் திருப்பம்

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \rho b l^3 (1^2 + 2^2 + \dots\dots\dots\dots + n^2)$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \rho b l^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

(*Tutorial Algebra, I.*, ப. 204 ஐப் பார்க்க).

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \rho b.\frac{a^3}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \frac{\rho b a^3}{6}.\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\rho b a^3}{3} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\text{(iv.)}$$

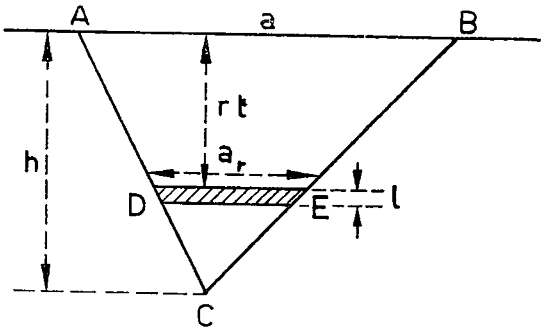
ஆகவே (iii), (iv) என்பனவற்றிலிருந்து

$$Z.\frac{\rho b a^2}{2} = \frac{\rho b a^3}{3};$$

$$\therefore\ Z = \tfrac{2}{3}a.$$

உதாரணம் 2. ஒரு பக்கம் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த் தப்படும் முக்கோணியினது அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

செயன்முறை ஈற்று உதாரணத்திலுள்ளது போன்றதாகும்.



படம் 60

பாயி ρ அடர்த்தி உடையதாகுக. ABC (படம் 60) முக்கோணியைக் குறிக்குமாயின அதனைச் செப்பமாய முன்போல $nl=h$ ஆகுமாறு ஒவ்வொன்றும் l அகலமுள்ளதும் AB யிற்குச் சமாந்தரமுமான n கீலங்களாகப் பிரிக்க. DE என்பது rl ஆழத்திலுள்ள ஒரு வகைக் கீலமாகுக. அதன் நீளம் a_r ஆகுக. ஆயின் l சிறிதாயின் நாம் அண்ணளவாய்ப் பெறுவன

$$\text{கீலத்தில் உதைப்பு} = \rho . a_r l . rl \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\text{கீலததிலுள்ள உதைப்பின் திருப்பம்} = \rho . a_r l (rl)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}.$$

(i) என்னுங் கோவையை எல்லாக் கீலங்களுக்கும் கூட்டல் செய்து கொண்டு $nl=h$ என்னும் நிபநதனைக்கு உட்பட $n \longrightarrow \infty$, $l \longrightarrow 0$ ஆகு மிடத்து எலலே எடுத்தலால் முகககோணியில் மொத்த உதைப்பை நாம் பெறுவோம். ஈற்று அதிகாரத்திலிருந்து முக்கோணியிலுள்ள மொத்த உதைப்பு எமக்குத் தெரியுமென்பதை உணர்வோமாயின் எம்முடைய வேலையைச் சுருக்கிக் கொள்ளலாம். முக்கோணியின் புவியீர்ப்பு மையம் $\frac{1}{3}h$ ஆழத்தில் இருத்தலால்

$$\text{முக்கோணியில் மொத்த உதைப்பு} = \rho . \tfrac{1}{2} ah . \tfrac{1}{3} h$$

$$= \tfrac{1}{6} \rho a h^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}.$$

(ii) என்னுங கோவையிலிருந்து எல்லாக் கீலங்களுக்கும் கூட்டுத் தொகையின் எல்லையைக் காண்பதால் முக்கோணியிலுள்ள உதைப்புக் கள எல்லாவற்றினதும் மொத்தத் திருப்பத்தைப் பெறுவோம்.

$$\text{ஆயின, மொத்தத திருப்பம்} = \lim_{n \to \infty} \Sigma \rho a_r l (rl)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iv)};$$

ஆனுல் இக்கூட்டுத்தொகையின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க முன்னர் கீலத்தின நீளமாகிய a_r கீலத்தின் ஆழத்தோடு மாறுமென நாம் கவனித்துக் கொண்டு a_r என்பதற்கு a, r, h, l என்பனவற்றின சார்பாய் ஒரு கோவையைப் பெறவேண்டும். ABC, DEC என்னும் இயல்பொத்த முக்கோணிகளை எடுத்து நோக்குதலால் இது செய்யப்படலாம். நாம் பெறுவது

$$\frac{\text{DE}}{\text{C யிலிருந்து DE யிற்குச் செங்குத்துத் தூரம்}}=\frac{\text{AB}}{h},$$

அதாவது
$$\frac{a_r}{h-rl}=\frac{a}{h},$$

அல்லது
$$a_r=\frac{a}{h}(h-rl),$$
$$=a-\frac{arl}{h}.$$

ஆகவே (iv) தருவது

$$\text{மொத்தத் திருப்பம்} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்}}\ \Sigma\rho\left(a-\frac{arl}{h}\right)l.r^2l^2$$
$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}}\ \Sigma\left(\rho ar^2l^3-\frac{\rho a}{h}r^3l^4\right)$$
$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}}\ \Sigma\left(\rho ar^2\frac{h^3}{n^3}-\frac{\rho a}{h}.r^3\frac{h^4}{n^4}\right),\ l=\frac{h}{n}\ \text{ஆதலால்}$$
$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}}\left[\frac{\rho ah^3}{n^3}(1^2+2^2+\dots+n^2)-\frac{\rho ah^3}{n^4}(1^3+2^3+\dots+n^3)\right]$$
$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}}\left[\frac{\rho ah^3}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{\rho ah^3}{n^4}.\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

(*Tutorial Algebra I.*, ப. 205 ஐப் பார்க்க).

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்}}\left[\frac{\rho ah^3}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\rho ah^3}{4}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$=\frac{\rho ah^3}{3}-\frac{\rho ah^3}{4}$$
$$=\frac{\rho ah^3}{12}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\text{(v)}$$

ஆயின் (iii), (v) எனபனவற்றிலிருந்து

$$Z.\tfrac{1}{6}\rho ah^2=\frac{\rho ah^3}{12},$$

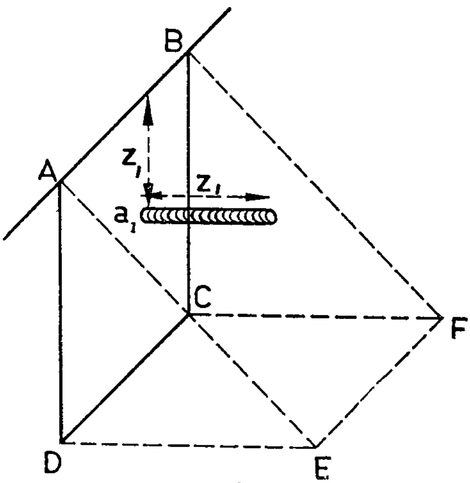
அதாவது
$$Z=\tfrac{1}{2}h.$$

36. கேத்திரகணித முறையிற் பெறப்படும் அமுக்க மையங்கள்

ஏற்கனவே நாம் எடுத்து நோக்கிய இரண்டு உதாரணங்களின் மூலம், அதாவது ஒரு பக்கம் பரப்பிலுள்ள செவ்வகம், முக்கோணி ஆகிய ஒவ்வொன்றின் மூலம் இம் முறையை விளக்குவோம்.

உதாரணம் 1. **ஒரு பக்கம் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் செவ்வகத்தினது அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.**

ABCD (படம் 61) ஆனது AB பரப்பிலிருக்குமாறுள்ள செவ்வகத்தைக் குறிக்க. கிடைத் தளத்தில் CDEF என்னுஞ் சமச் செவ்வகத்தைக் கற்பனை செய்க. ஆயின் AE, BF என்பனவற்றைத் தொடுத்தலால் தனது தளமுகமாகிய ABFE எனபது கிடைத்தளம் நிலைக்குத்துத் தளங்களோடு 45° சாய்வு கொள்ளுமாறு உள்ள ஓர் ஆப்பைப் பெறுவோம். ஆகவே, AB என்னும் பரப்பின் கீழ் ABCD என்னுந் தொடக்கச் செவ்வகத்திலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் ஆழமும் ABFE என்னுஞ் சாய் முகத்திலிருந்து அப்புள்ளியின் கிடைத் தூரத்திற்குச் சமன்.



படம் 61

ஆயின், z_1 ஆழத்தில் ABCD என்னுஞ் செவ்வகத்தின் a_1 என்னும் மூலகப் பரப்பளவை எடுத்து நோக்குக. z_1 ஆனது ஆப்பின ஒரு கிடை நிரலினது நீளமாதலால் இந்நிரலின் கனவளவு a_1z_1 ஆகும். ஆகவே AB பற்றி இநநிரலினது திருப்பம் $a_1z_1^2$ ஆகும். இத்திண்ம ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் வேண்டுமாயின் AB யிற்கூடாகச் செல்லுங் கிடைத் தளத்தின் கீழ் (அதாவது திரவப் பரபபின கீழ) அதன் ஆழம் ($\bar{z}$)

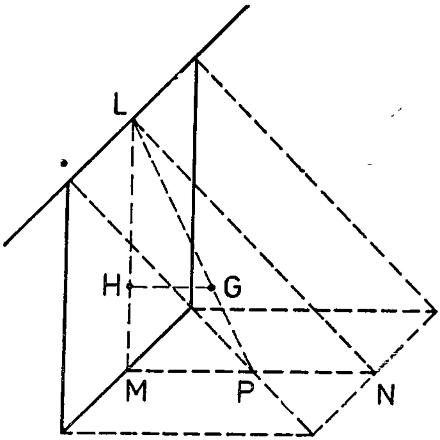
$$\bar{z}\,\Sigma a_r z_r = \Sigma a_r z_r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

என்பதன் எல்லைப் பெறுமானத்தாலே தரப்படும். ஏனெனின் எல்$\Sigma a_r z_r$ என்பது ஆப்பின் மொத்தக் கனவளவு ஆகி எல்$\Sigma a_r z_r$ என்பது மூலகக் கனவளவுகளின் மொத்தத் திருப்பமாகும்.

ஆயின் (i) இலிருந்து

$$\bar{z} = \frac{\text{எல்}\ \Sigma a_r z_r^2}{\text{எல்}\ \Sigma a_r z_r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii).$$

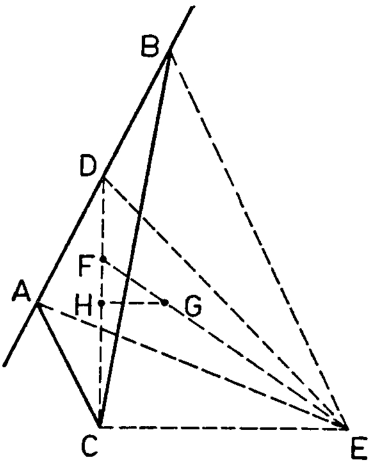
இதனை நாம் ஒரு தளப் பரப்பளவின் அமுக்க மையத்திற்குப் பெற்றுக் கொண்ட [§ 33 (iii)] சூத்திரத்தோடு ஒப்பிடுமிடத்து ABCD என்னுஞ் செவ்வகத்தின அமுக்க மைய ஆழமானது ABCDEF என்னுந் திண்ம ஆப்பினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழமாகும் என்பது தெளிவாகும். இவ்வாழம் எளிதிற் காணப் படலாம்.



படம் 62

LMN என்பது திண்ம ஆப்பின் மையத்திலுள்ள நிலைக் குத்து முக்கோணி வெட்டாகுக (படம் 62). LP யானது இம் முக்கோணியின் ஓர் இடையமாயின், $LG = \frac{2}{3}LP$ ஆகுமாறு உள்ள G யில் திண்ம ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் கிடக்கும். G யானது செவ்வகத்தின் அமுக்க மையமாகிய H இற்குக் கிடையாய் எறியப்படுதலால் $LH = \frac{2}{3}LM$, அதாவது செவ்வகத்தினது அமுக்கமையத்தின் ஆழம் நிலைக்குத்தான ஓரத்தினுடைய நீளத்தின் $\frac{2}{3}$ ஆகும்.

உதாரணம் 2. ஒரு பக்கம் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் முக்கோணியினது அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.



படம் 63

இங்கு முறை செப்பமாய் ஈற்று உதாரணத்திலுள்ள போன்றதாகும். ABC (படம் 63) ஆனது AB என்பது பரப்பிலிருக்குமாறும் CD என்பது ஓர் இடையமாகுமாறும் உள்ள முக்கோணி ஆகுக. இவ்வகையில் CE என்பதைக் கிடையாகவும் அதன் நீளம் பரப்பின் கீழ் C யின் ஆழத்திற்குச் சமமாகுமாறும் வரைதலால் திண்மம் பெறப்படும். AE, BE என்பனவற்றைத் தொடுத்தலால் நாம் ஒரு திண்ம நான்முகியைப் பெறுவோம். இதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் (G)

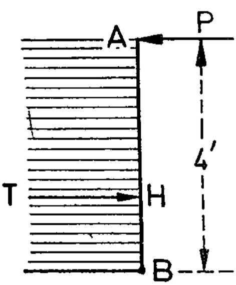
எறியமானது ABC என்னும் முக்கோணியின் அமுக்க மையம் (H) ஆகும். F ஆனது ABC என்னும் முக்கோணியின் புவியீர்ப்பு மையமாயின், அதாவது $DF=\frac{1}{3}DC$ ஆயின், $EG=\frac{3}{4}EF$ ஆகுமாறு G உள்ளது.

ஆகவே,
$$CH=\tfrac{3}{4}CF.$$
$$CF=\tfrac{2}{3}CD \quad \text{ஆதலால்,}$$
$$CH=\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}CD.$$
$$\therefore\ CH=\tfrac{1}{2}CD;$$

ஆகவே, பரப்பின் கீழ் H இன் ஆழம் C எனனும் உச்சியினது ஆழத்தின் அரைப் பங்காகும்.

ஈற்று மூன்று பிரிவுகளிலும் இரண்டு எளிய வகைகளில் வேறுவேறான மூனறு முறைகளைப் பாவித்து அமுக்க மைய்த்தின நிலையைக காணும் பிரச்சினையையே எடுத்து நோக்கினேம். இம் மூன்று முறைகளுள் நுண் கணிதம் வழங்கும முறை விரிந்த பிரயோகம் உடையதாதலால் மிக முக்கியமானது. நுணகணிதம் வழஙகாத முறை, சிக்கல்கள் கூடிய வகை களில் மிகச் சிரமமுடையதாகும். விளையுந் திண்மங்களினது புவியீர்ப்பு மை யத்தின் நிலைகள் தெரியாது அல்லது எளிதிற் கணிகக முடியாது இருக்கக் கூடுமாதலால் கேத்திர கணித முறையானது எங்கும் பிரயோகிக்கப்பட முடியாது. சிக்கல்கள் சற்றுக் கூடிய வகைகளைக் கொண்ட பின்னுள்ள பிரிவு ஒன்றில் (§ 47) நாம் நுண்கணித முறையைப் பிரயோகிப்போம். இப்போது நாம் முந்திய பிரிவுகளிற் கணட உள்ளாழ்த்தப்பட்ட செவ்வ கததின அமுகக மைய நிலையை உட்படுத்தும் இரண்டு உதாரணங்களைத் தருவோம.

37. உதாரணம் 1. 3 அடி அகலமும் 4 அடி ஆழமும் உடைய செவ்வகக் குறுக்கு வெட்டுள்ள தாழியின் ஒரு முனை அதன் கீழ் ஓரத்திற் பிணைக்கப்பட்டு அதன் மேல் ஓரத்தின் நடுப்புள்ளியிற் பிரயோகிக்கப்படும் P இரு. நிறையுடைய ஒரு கிடையான விசையால் ஒய்வில் வைக்கப்படும். தாழி நீரால் மட்டாய் நிரப்பப்படுமாயின் நீர் வெளியே பாய்தலைத் தடுத்தற்கு வேண்டிய மிகச் சிறிய விசையைக் காண்க. (நீரின் அடர்த்தி 62·5 இரு. கன அடிக்கு).



படம் 64

A பரப்பிலும் B பிணையற் கோட்டிலும் இருக்குமாறு AB (படம் 64) என்பது தாழியினுடைய முனையின் குறுக்கு வெட்டைக் குறிக்க. ஆயின், H ஆனது செவ்வக முனையின் அமுக்க மைய மாயின் செவ்வக முனையின்

$$AH=\tfrac{2}{3}AB$$
$$=\tfrac{2}{3}\times 4 \text{ அடி}$$
$$\therefore\ BH=\tfrac{1}{3}\times 4 \text{ அடி}$$

புவியீர்ப்பு மையம் 2 அடி ஆழத்திலிருத்தலால் முனையில் மொத்த உதைப்பு $(T) = 3 \times 4 \times 2 \times 62\frac{1}{2}$ இரு. நிறை. B பற்றித் திருப்பங்கள் எடுக்குமிடத்து மிகச் சிறிய விசையாகிய P

$$P.AB = T.BH$$

என்பதாலே தரப்படும்.

$$\therefore\ P \times 4 = 3 \times 4 \times 2 \times 62\tfrac{1}{2} \times \tfrac{4}{3}.$$

$$\therefore\ P = 500 \text{ இரு. நிறை.}$$

உதாரணம் 2. ஒரு பூட்டுப் படலை 8 அடி அகலமானது. ஒரு பக்கத்தில் நீரின் ஆழம் 12 அடியும் மற்றைப் பக்கத்தில் ஆழம் 7 அடியுமாகும். ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் பாயியின் உதைப்பையும் அமுக்க மையத்தையும் கண்டு அவற்றின் துணைகொண்டு படலையில் விளையுள் விசையின் பருமனையும் தாக்கு கோட்டையும் காண்க.

12 அடி ஆழமுடைய பக்கத்தில் உதைபபு = பரபபளவு $\times\ w \times$ பரப்பள வினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம்

$$= 96 \times w \times 6 = 576w$$

$$= 576000 \text{ அவுன்சு நிறை ;}$$

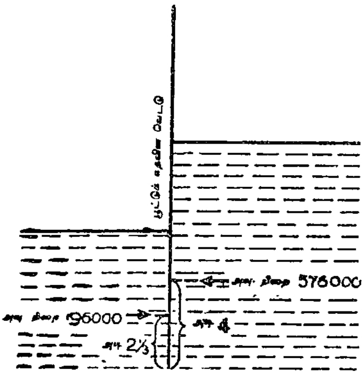
இது நிலைக்குத்து இடையக்கோட்டில $\frac{2}{3} \times 12$ அல்லது 8 அடி ஆழத்தில் அதாவது படலை அடியிலிருந்து 4 அடியில், தாக்கும்.

7 அடி ஆழமுடைய பக்கத்தில் உதைப்பு

$$= 56 \times w \times 3\tfrac{1}{2} = 196w$$

$$= 196000 \text{ அவுன்சு நிறை ;}$$

அது $\frac{2}{3} \times 7$ அல்லது $4\frac{2}{3}$ அடி ஆழத திலை, அதாவது படலை அடியிலிருந்து $2\frac{1}{3}$ அடியில், தாக்கும்.



படம் 65

ஆயின், விசைகள படம் 65 இல் உள்ளன போலாகும். விளையுள் $= (576000 - 196000)$ அவுன்சு $= 380000$ அவுன்சு நிறை ஆகி இடையக் கோட்டில் அடியிலிருந்து x தூரத்தில் தாக்கும் ; இங்கு x ஆனது

$$380000x = 576000 \times 4 - 196000 \times 2\tfrac{1}{3}$$

என்பதாலே தரப்படும்.

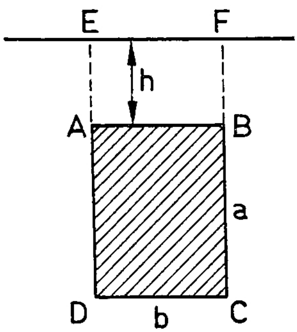
$$\therefore\ x = \frac{576 \times 4 - 196 \times 2\frac{1}{3}}{380} = 4{\cdot}86 \text{ அடி.}$$

ஆகவே விளையுள் விசை = 380000 அவுன்சு நிறை, அல்லது ஏறக் குறைய 10·6 தொன் நிறையாகி படலையின் இடையக்கோட்டில் அடியிலிருந்து 4·86 அடிதூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் தாக்கும்.

38. ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்பட்ட எளிய கேத்திர கணித உருவங்களினது சேர்க்கையின் அமுக்க மையம்

§28 இல் இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட எளிய கேத்திரகணித வடிவுகளின் கூட்டாக அல்லது வித்தியாசமாகக் கருதப்படும் ஒரு பரப்பளவில் மொத்த உதைப்பை நாம் பெறக்கூடுமெனக் கண்டுள்ளோம். அத்தகைப் பரப்பளவின் அமுக்க மைய நிலையைத் துணிதற்கு அதே செயன் முறையை நாம் பல முறையும் வழங்கலாம். இம்முறை பின் வரும் உதாரணங்களாலே தெளிவாய் எடுத்துக்காட்டப்படலாம்.

உதாரணம் 1. மேலோரம் h ஆழத்திற் கிடையாகுமாறு ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படுஞ் செவ்வகத்தின் அமுக்க மையத்தைக் காண்க.



படம் 66

ABCD (படம் 66) ஆனது ρ அடர்த்தியுள்ள பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படுஞ் செவ்வகத்தைக் குறிக்க. AB யானது (நீளம் b) h ஆழத்திற் கிடையாயும் BC என்னும் பக்கம் a நீளமுமாகும். நிலைக்குத்தான ஓரங்கள் பரப்பை E, F என்பனவற்றிற் சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டுக. ஆயின் ABCD எனனுஞ் செவ்வகம் EFCD, EFBA என்னுஞ் செவ்வகங்களின் வித்தியாசமாகக் கருதப்படலாம் ; இவற்றின் ஓர் ஓரம் பரப்பிலிருத்தலால் இவற்றின் அமுக்க மையங்கள் தெரியப்படும். பின்வரும் அட்டவணை ஒன்றை வரைதல் இசைவாகும் :—

செவ்வகம்	பரப்பளவு	மொத்த உதைப்பு	அமுக்கமைய ஆழம்
EFCD	$b(a+h)$	$\rho.b(a+h).\frac{1}{2}(a+h)$	$\frac{2}{3}(a+h)$
EFBA	bh	$\rho.bh.\frac{1}{2}h$	$\frac{2}{3}h$
ABCD	ab	$\rho.ab.(h+\frac{1}{2}a)$	Z

இங்கு Z ஆனது வேண்டிய அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் குறிக்கும். EF என்னும பரப்புப்பற்றி இவவுதைப்புக்களினது திருப்பங்களை எடுக்குமிடத்து, ABCD என்னும் பரப்பளவில் உதைப்பு $\times$ Z + EFBA என்னும் பரப்பளவில் உதைப்பு $\times$ அதன அமுக்க மையத்தின் ஆழம் = EFCD என்னும் பரப்பளவில் உதைப்பு $\times$ அதன் அமுக்க மையத்தின் ஆழம்.

அதாவது,

$$\rho.ab\left(h+\tfrac{1}{2}a\right)\times Z+\rho.bh\tfrac{1}{2}h\times\tfrac{2}{3}h=\rho.b\,(a+h).\tfrac{1}{2}(a+h)\times\tfrac{2}{3}(a+h),$$

அதாவது,

$$\rho\cdot\frac{ab}{2}(2h+a)\,Z+\frac{\rho bh^3}{3}=\frac{\rho b}{3}(a+h)^3.$$

$$\therefore\ Z=\frac{\frac{b}{3}[(a+h)^3-h^3]}{\frac{ab}{2}(a+2h)}$$

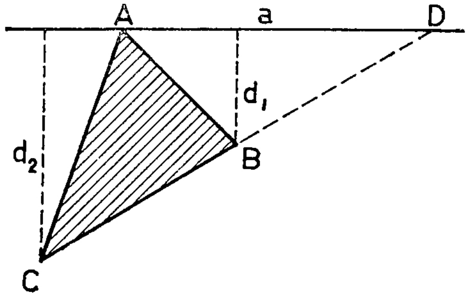
$$=\tfrac{2}{3}.\frac{a^3+3a^2h+3ah^2}{a(a+2h)}$$

$$=\tfrac{2}{3}.\frac{a^2+3ah+3h^2}{a+2h}.$$

இதுவே அமுக்க மையத்தின் ஆழம். $h=0$ என இடப்படுமிடத்து இது $Z=\frac{2}{3}a$ என்பதற்கு ஒடுங்கும். இம்முடிபை ஒரு பக்கம் பரப்பிலிருக்கு மாறு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படுஞ் செவ்வகத்தின் அமுக்க மைய ஆழத்திற்கு முன்னர் நாம் பெற்றுள்ளோம்.

இறுதியில், அமுக்க மையத்தின் ஆழம் இப்போது தெரியுமாதலாலும், இம்மையம் சமச்சீரின்படி AB, CD என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகளைத் தொடுக்குங் கோட்டிற் கிடக்கவேண்டுமாதலாலும் இதன் நிலை உறுதி யாக்கப்படும்.

உதாரணம் 2. ஓர் உச்சி பரப்பிலும் மற்றைய இரண்டு உச்சிகளும் d_1, d_2 ஆழங்களிலும் இருக்குமாறு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் முக்கோணியினது அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.



படம் 67

ABC (படம் 67) ஆனது முக்கோணியாகி, நீட்டப்பட்ட CB பரப்பை D யில் வெட்டுக. இங்கு $AD=a$ ஆகுக.

ஆயின் ABC என்னும் முக்கோணி ADC, ADB என்னும் முக்கோணி களின் வித்தியாசமாகும். இவற்றின் ஓர் ஓரம் பரப்பிலிருத்தலால் இவற்றில் மொத்த உதைப்புக்களையும் இவற்றின் அமுக்க மைய ஆழங் களையும் நாம் எளிதிற் காணலாம். ஆகவே கழித்தலால் நாம் ABC என்னும் முககோணியில் மொத்த உதைப்பைப் பெற்றுக்கொண்டு முந்திய உதாரணத்திற் செய்தது போல் ABC என்னும் முக்கோணியினது அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காணலாம். இவ்வாழம் Z ஆகி பாயியின் அடர்த்தி ρ ஆகுக.

பின்வரும் அட்டவணையை வரைவோம் :—

முக்கோணி	பரபபளவு	மொத்த உதைப்பு	அமுக்க மையததின் ஆழம்
ADC	$\frac{1}{2}ad_2$	$\rho.\frac{1}{2}ad_2.\frac{1}{3}d_2$	$\frac{1}{2}d_2$
ADB	$\frac{1}{2}ad_1$	$\rho.\frac{1}{2}ad_1.\frac{1}{3}d_1$	$\frac{1}{2}d_1$
ABC		$\frac{a\rho}{6}(d_2^2-d_1^2)$	Z

இந்த அட்டவணையில் ABC என்னும் முக்கோணியில் மொத்த உதைப்பை அதன் புவியீர்ப்பு மையத்திலுள்ள அமுக்கச் செறிவிலிருந்து பெருது, ADB என்னும் முக்கோணியின உதைப்பை ADC எனனும் முக்கோணியின் உதைப்பிலிருந்து கழித்துள்ளோம்.

ஆயின், ABC என்னும் முககோணியில் உதைப்பு$=\rho.\frac{1}{2}ad_2.\frac{1}{3}d_2-\rho.\frac{1}{2}ad_1.\frac{1}{3}d_1$

$$=\frac{a\rho}{6}(d_2^2-d_1^2).$$

இம்மொத்த உதைப்புக்களுக்கு AD என்னும் பரப்புப் பற்றித் திருப்பங்கள் எடுப்போமாயின்

$$\left.\begin{array}{l}\triangle\ \text{ABC யில் உதைப்பு} \times Z + \\ \triangle\ \text{ADB யில் உதைப்பு} \times \frac{1}{2}d_1\end{array}\right\} = \triangle\ \text{ADC யில் உதைப்பு} \times \frac{1}{2}d_2.$$

$$\therefore\ \frac{a\rho}{6}(d_2^2-d_1^2)\,Z+\frac{a\rho}{6}d_1^2\times\frac{1}{2}d_1=\frac{a\rho}{6}d_2^2\times\frac{1}{2}d_2.$$

$$\therefore\ 2(d_2^2-d_1^2)\,Z+d_1^3=d_2^3,$$

$$\therefore\ Z=\frac{d_2^3-d_1^3}{2(d_2^2-d_1^2)}=\frac{d_2^2+d_2d_1+d_1^2}{2(d_2+d_1)}.$$

அம்முடிபிலிருந்து ஓர் உச்சி பரப்பிலும் எதிர்ப் பக்கம் கிடையாக h ஆழத்திலும் இருக்குமாறு ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப படும் முக்கோணியினது அமுக்க மையத்தின் நிலையை நாம் உய்த்தறிய லாம்.

$d_2 = d_1 = h$ என நாம் பிரதியிட இம்முடிபு தருவது

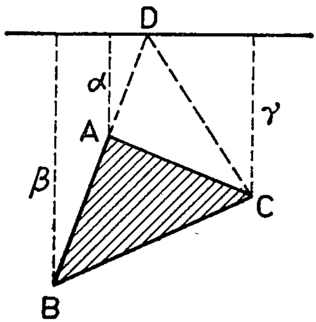
$$Z = \frac{h^2 + h^2 + h^2}{2(h+h)}$$

$$= \frac{3h^2}{4h}$$

$$= \tfrac{3}{4}h.$$

உதாரணம் 3. ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் யாதும் ஒரு முக்கோணியினது அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

ABC முக்கோணி ஆகுக (படம் 68). பரப்பை D யிற் சந்திக்குமாறு BA என்பதை நீட்டுக. CD என்பதைத் தொடுக்க.



படம் 68

ஆயின, α, β, γ என்பன முறையே A, B, C எனபனவற்றின் ஆழங்களாயின ஈற்று உதாரணத்திலிருந்து $\triangle$ DBC, $\triangle$ DAC என்பனவற்றின் அமுக்க மைய ஆழங்கள் முறையே $(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)/2(\beta + \gamma)$, $(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2)/2(\alpha + \gamma)$ ஆகுமென நாம் காண்போம்.

அன்றியும் $\triangle$ DBC யினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம்

$= \frac{1}{3} \times$ (D, B, C என்னும் புள்ளிகளினுடைய ஆழங்களின் கூட்டுத் தொகை)

$$= \frac{\beta + \gamma}{3}.$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle \text{ DBC யில் உதைப்பு}}{\triangle \text{ DAC யில் உதைப்பு}} = \frac{\triangle \text{ DBC} \times w \times \frac{\beta+\gamma}{3}}{\triangle \text{ DAC} \times w \times \frac{\alpha+\gamma}{3}}$$

$$= \frac{\text{DB} \times (\beta + \gamma)}{\text{DA} \times (\alpha + \gamma)} = \frac{\beta(\beta+\gamma)}{\alpha(\alpha+\gamma)};$$

$\therefore$ ABC யினது அமுக்க மையத்தின் ஆழம்

$$= \frac{\beta(\beta+\gamma) \times \frac{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2}{2(\beta+\gamma)} - \alpha(\alpha+\gamma)\frac{\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2}{2(\alpha+\gamma)}}{\beta(\beta+\gamma) - \alpha(\alpha+\gamma)}$$

(*Tutorial Statics*, ப. 84 ஐப் பார்க்க)

$$=\frac{\beta(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)-\alpha(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)}{2\{\beta(\beta+\gamma)-\alpha(\alpha+\gamma)\}}$$

$$=\frac{(\beta^3-\alpha^3)+(\beta^2-\alpha^2)\gamma+(\beta-\alpha)\gamma^2}{2\{(\beta^2-\alpha^2)+(\beta-\alpha)\gamma\}}$$

$$=\frac{(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+(\beta+\alpha)\gamma+\gamma^2}{2\{(\beta+\alpha)+\gamma\}},\ (\beta-\alpha) \text{ ஆல் வகுக்க}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{2(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

உதாரணம் 4. ஓர் மூலை பரப்பிலும் ஒரு மூலைவிட்டம் நிலைக்குத்தாகுமாறும் ஒரு பாயியில் உள்ளாழ்த்தப்படுஞ் சதுரத்தினது அமுக்க மையத்தின் நிலையைக் காண்க.

AC (நீளம் h) நிலைக்குத்தாகுமாறுள்ள சதுரததை ABCD குறிக்க (படம் 69). CD, CB என்பன பரப்பை முறையே E, F எனனும் புள்ளிகளிற் சந்திக்குமாறு நீட்டப்படுக. ஆயின் ABCD என்னுஞ் சதுரமானது CEF என்னும் முக்கோணியிலிருந்து ADE, ABF என்னுஞ் சம முக்கோணிகளைக் கழித்தலாற பெறப்படும். இம்முக்கோணிகள் யாவும் ஒரு பக்கம் பரப்பில் உடையனவாதலால் அவற்றின் உதைப்புக்களையும் அமுக்க மையத்தின ஆழங்களையும் எளிதிற் காணலாம். உருவத்தின் கேத்திரகணிதத்திலிருந்து $AF = AE = h$ ஆகி B, D என்பன ஒவ்வொன் றும் $\frac{1}{2}h$ ஆழத்தில் இருக்கும்.

ஆயின் நாம் பின்வரும் அட்டவணையைப் பெறுவோம் :—

முக்கோணி	பரப்பளவு	உதைப்பு	அமுக்க மையத்தின் ஆழம்.
CEF	h^2	$\rho\cdot h^2\cdot\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}h$
ADE	$\frac{1}{4}h^2$	$\rho\cdot\frac{1}{4}h^2\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)$	$\frac{1}{4}h$
ABF	$\frac{1}{4}h^2$	$\rho\cdot\frac{1}{4}h^2\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)$	$\frac{1}{4}h$

சதுரம் ABCD யின் பரப்பளவு $=$ $\triangle$ CEF யின் பரப்பளவு $-$ $\triangle$ ADE யின் பரப்பளவு $-$ $\triangle$ ABF இன் பரப்பளவு. ஆதலால,

சதுரம் ABCD யில் உதைப்பு $=$ $\triangle$ CEF யில் உதைப்பு $-$ $\triangle$ ADE யில் உதைப்பு $-$ $\triangle$ ABF இல் உதைப்பு

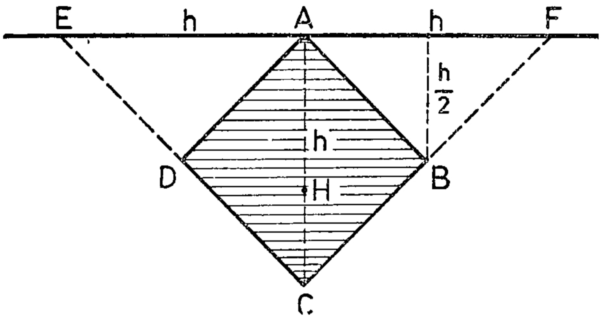
$$=\tfrac{1}{3}\rho h^3-\tfrac{1}{24}\rho h^3-\tfrac{1}{24}\rho h^3=\tfrac{1}{4}\rho h^3.$$

சதுரத்தினது அமுக்க மையத்தின் ஆழம் Z ஆயின் பரப்புப் பற்றி உதைப்புக்களின் திருப்பங்களை எடுக்க

$$\tfrac{1}{4}\rho h^3 \times Z = \tfrac{1}{3}\rho h^3 \times \tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{24}\rho h^3 \times \tfrac{1}{4}h - \tfrac{1}{24}\rho h^3 \times \tfrac{1}{4}h$$
$$= \tfrac{1}{6}\rho h^4 - \tfrac{1}{48}\rho h^4$$
$$= \tfrac{7}{48}\rho h^4;$$
$$\therefore\ Z = \tfrac{7}{12}h.$$

அதாவது சதுரத்தின அமுக்க மையமானது $AH = \tfrac{7}{12}AC$ ஆகுமாறு H இல் இருக்கும்; அல்லது, சதுரததின ஒரு பக்கம் a என்னும் நீளமாயின்

$$AH = \tfrac{7}{12} . 2a \text{ கோசை } 45^\circ$$
$$= \frac{7a\sqrt{2}}{12}.$$



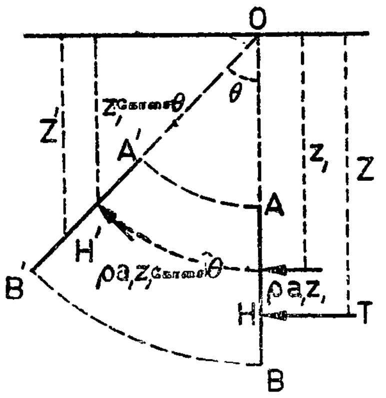
படம் 69

39. ஒரு பாயியில் யாதும் ஒரு கோணத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படும் பரப்பளவுக்கு அப்பரப்பளவு தொடர்பான அமுக்க மையத்தின் நிலையானது அப்பரப்பளவின் தளம் பரப்போடு வெட்டுங் கோடுபற்றிச் சுழற்றலால் மாறுது.

இதுவரை அமுக்க மையத்தின நிலைபற்றிய ஆராய்வுகளில் பரப்பளவு என்றும் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படுமென வற்புறுத்தியுள்ளோம்; இது பொதுமைப்பாட்டைக் கெடாதென முன்னர் காட்டியுள்ளோம். இக் கூற்றை உண்மைப்படுததுந் தேற்றத்தை நாம் இப்போது நிறுவுவோம்.

§ 33 என்பதை மறுபடியும் எடுத்து நோக்குக. படம் 70 ஆனது படம் 56 இல் உள்ள பரப்பளவின் வெட்டுப் பார்வையைக் குறிக்க. அப்பிரிவில் எடுத்து நோக்கப்பட்ட தளப் பரப்பளவின் வெட்டு ஏற்றத்தை AB குறிக்க. நீட்டப்பட்ட BA பாயிப் பரப்பை O வில் வெட்டுக. பரப்பளவிலுள்ள மொத்த உதைப்பு (T) ஆனது H இல் தாக்கும்; ஆகவே H அமுக்க மைய நிலையாகும். இனி OAB என்னும் நிலைக்குத்துக் கோடு θ

பாகைக் கோணத்திற்கூடாக OA'B' என்னும் நிலைக்குச் சுழலுமென உத்தேசிக்க. உள்ளாழ்த்தப்படும் பரப்பளவின் தளம் இப்போது நிலைக்குத் தோடு θ கோணத்தை ஆக்கும். H' ஆனது அமுக்க மையத்தின்



படம் 70

புதிய நிலை ஆயின H ஆனது H' இற்குச் சுழலுமென நாம் நிறுவுவோம. அதாவது, பரப்பளவிற்குத் தொடர்பாய் அமுக்க மையத்தின நிலை மாறாது.

z_1 ஆழத்திலிருந்த a_1 என்னும் பரப்பளவுடைய வகை மூலகம், சுழற்சிக்குப பின்னர் z_1 கோசை θ எனனும் ஆழத்திலிருக்கும். எனவே

மூலகத்தில் உதைப்பு $= \rho a_1 z_1$ கோசை θ, அண்ணளவாய்.

ஆகவே § 33 இன குறிப்பீட்டினபடி

பரப்பில் மொத்த உதைப்பு $=$ எல் $\sum_{r=1}^{n} \rho a_r z_r$ கோசை θ

$=$ எல் ρ கோசை $\theta \sum_{r=1}^{n} a_r z_r$

$= \rho$ கோசை $\theta \times$ எல் $\sum_{r=}^{n} a_r z_r$ ....(i)

பாயிப் பரப்புபறறி மூலகத்திலுள்ள உதைப்பின் திருப்பம்

$= \rho a_1 z_1$ கோசை $\theta . z_1$ கோசை θ, அண்ணளவாய்.

ஆகவே, இபபரப்புப பற்றி மொத்தத் திருப்பம்

$=$ எல் $\sum_{r=1}^{n} \rho a_r z_r^2$ கோசை^{2} θ

$=$ எல் ρ கோசை^{2} $\theta \sum_{r=1}^{n} a_r z_r^2$

$= \rho$ கோசை^{2} $\theta \times$ எல் $\sum_{r=1}^{n} a_r z_r^2$ ....(ii) ;

இங்கு ρ, θ என்பன எல்லா மூலகங்களுக்கும் மாறிலிகளாகும். அதோடு § 33 இல் உள்ளதுபோல்

$$a_1 + a_2 + \dots\dots\dots\dots + a_n = \text{முழுப் பரப்பளவு}$$

என்னும் நிபந்தனைக்குட்பட $n \to \infty$ ஆகுமிடத்து இங்கு எல்லைகள் எடுக்கப்படும்.

புதிய நிலையில் அமுக்க மையத்தின் ஆழம் (H′) Z′ ஆயின் (i), (ii) என்பனவற்றிலிருந்து,

Z′ × பரப்பளவில் மொத்த உதைப்பு = பரப்பளவிலுள்ள உதைப்பின் மொத்தத் திருப்பம்.

அதாவது,

$$Z' \times \rho \text{ கோசை } \theta \times \text{எல் } \Sigma a_r z_r = \rho \text{ கோசை}^2 \theta \times \text{எல் } \Sigma a_r z_r^2.$$

$$\therefore \quad Z' = \text{கோசை } \theta \times \frac{\text{எல் } \Sigma a_r z_r^2}{\text{எல் } \Sigma a_r z_r}$$

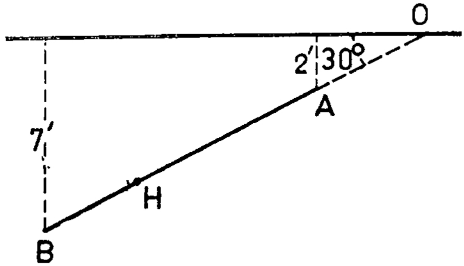
$$= \text{கோசை } \theta \times Z, \text{ § 33 இலிருந்து.}$$

ஆனால் $$Z' = OH' \times \text{கோசை } \theta.$$

$$\therefore \quad OH' = Z = OH.$$

∴ H ஆனது H′ இறகுச் சுழலும்; ஆகவே பரப்பளவிற்குத் தொடர்பான அமுக்க மையத்தின் நிலை சுழற்சியால் மாற்றப்படாது.

உதாரணம் 1. இரண்டு ஓரங்கள் 2 அடி ஆழத்திலும் 7 அடி ஆழத்திலுங் கிடையாக இருக்குமாறு ஒரு செவ்வகம் ஒரு பாயியில் உள்ளாழ்த்தப்படும். இச் செவ்வகத் தளம் கிடையோடு 30° சாய்வு உள்ளதாயின் அதன் அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.



படம் 71

AB (படம் 71) செவ்வகத்தின் ஒரு வெட்டைக் குறிக்க. நீட்டப்பட்ட BA பரப்பை O விற் சந்திக்க. செவ்வகத்தின் அமுக்க மையம் H இல உள்ளது.

ஆயின், § 38 உதாரணம் 1 இன்படி, AB ஒரு நிலைக்குத்துக் கோடாகுமாறு O பற்றிச் சுழற்றப்படுமாயின்

$$OH = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{a^2 + 3ah + 3h^2}{a + 2h} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(i)}$$

இங்கு $a = AB$, $h = OA$.

இந்த உதாரணத்தில் OA கோசை 60° = 2.

$$\therefore \quad OA = 4 \text{ அடி} = h,$$

$$AB = 10 \text{ அடி} = a.$$

இப்பெறுமானங்களை (i) இற் பிரதியிட

$$OH = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{100 + 120 + 48}{10 + 8}$$

$$= \tfrac{268}{27} \text{ அடி}.$$

ஆகவே பாயிப் பரப்பின் கீழ் H இன் ஆழம் = OH கோசை 60°

$$= \tfrac{268}{27} \times \tfrac{1}{2} \text{ அடி}$$

$$= 4{\cdot}96 \text{ அடி}.$$

40. ஒன்றோடொன்று கலவாத பல பாயிகளில் உள்ளாழ்த்தப்படும் பரப்பளவின் அமுக்க மையம்

§ 33 இல் ஒரு தளப் பரப்பளவினது அமுக்கமையத்தின் நிலையைக் காணும் முறைகளை ஆராயுமிடத்து பாயி ஏகவினமானதென உத்தேசித்துள்ளோம்.

வேறுவேறான அடர்த்திகளைக் கொண்ட வேறுவேறான பல பாயிப்படைகளில் உள்ளாழ்த்தப்படும் பரப்பளவை எடுத்து நோக்குவோமாயின் இதே அடிப்படை முறை இங்கும் பிரயோகிக்கப்படலாம். ஆனால் யாதும் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆழத்தில் அமுக்கச் செறிவைக் காணும்பொழுது கவனம் செலுத்தப்பட வேண்டும். உதாரணமாக, ρ_1 அடர்த்தியும் d ஆழமும் உள்ள ஒரு படை $\rho_2\,(>\rho_1)$ என்னும் அடர்த்தியுள்ள வேறொரு திரவத்தின் மேல் ஓய்விலிருக்குமாயின் பொதுப் பரப்பின் கீழ் z ஆழத்தில் திரவங்களாலேயே ஆய அமுக்கச் செறிவு.

$$\rho_1 d + \rho_2 z.$$

ஆகவே § 33 இற் செய்ததுபோல் நாம் ஒரு மூலகத்தில் உதைப்பைக் கண்டு பரப்பளவில் உதைப்பைக் காணலாம் ; பாயிப் பரப்பு பற்றி மூலகத்தி லுள்ள உதைப்பின் திருப்பத்தைக் கண்டு மொத்தத் திருப்பத்தைக் காணலாம் ; அதன் பின்னர் திருப்பிச் சமன்பாட்டை வழங்கி அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காணலாம்.

சில சமயங்களில் விரைவாகச் செய்யக்கூடிய வேறொரு முறையானது, எல்லாத் திரவங்களும் ஒரே அடர்த்தியுள்ளன எனவும், பரப்பளவின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் உள்ள அமுக்கச் செறிவு உண்மையிலுள்ள அதே செறிவாகுமாறு ஒவ்வொரு பாயிப் படையின் தடிப்பும் மாற்றப்படுமெனவும் உத்தேசித்தலே. ஆயின், மேலே உள்ள உதாரணத்தில் திரவத்தின்

மேற் படையும் ρ_2 அடர்த்தி உடையதென உத்தேசிப்போமாயின் $\rho_2 h = \rho_1 d$ ஆகுமாறு அதன் ஆழம் (h) இருக்க வேண்டும். ஏனெனின் பொதுப் பரப்பில் திரவத்தாலேயே ஆய அமுக்கச் செறிவு $\rho_1 d$ ஆகும்.

ஆகவே $$h = \frac{\rho_1}{\rho_2} d.$$

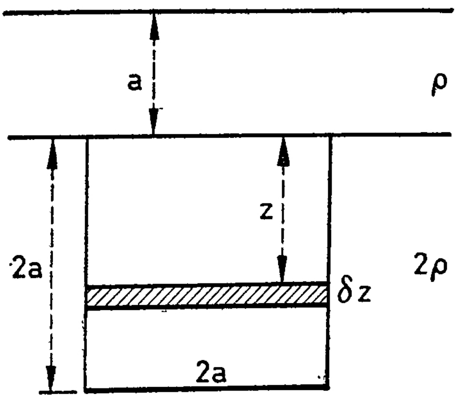
ஒப்பீட்டுக்காக ஓர் உதாரணத்தை இரு முறைகளாலும் செய்து காட்டுவோம்.

உதாரணம் 1. ρ அடர்த்தியும் a ஆழமும் உள்ள ஒரு திரவப்படை 2ρ அடர்த்தியும் $2a$ யிலும் பெரிய ஆழமும் உள்ள ஒரு திரவப் படையில் மீபொருத்தப்படும். $2a$ பக்கமுள்ள ஒரு சதுர அடர் அதன் மேலோரம் இரு திரவங்களின் பொதுப் பரப்பிலிருக்குமாறு நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். அடரின் மேல் ஓரத்தின் கீழ் திரவத்தினுடைய அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க. (*Inter. Sc.*)

முறை (1). சதுர அடா படம் 72 இற் குறிக்கப்படும்.

பொதுப் பரப்பின் கீழ் z ஆழத்தில δz அகலமுள்ள ஒரு கிடையான மூலகத்தை எடுக்க. இவ்வாழத்தில் அமுக்கச் செறிவு $\rho a + 2\rho z$ ஆதலால்

மூலகத்தில் உதைப்பு $= 2a\delta z\,(\rho a + 2\rho z)$;



படம் 72

$\therefore$ சுயாதீனப் பரப்புப் பற்றி மூலகத்திலுள்ள உதைப்பினது திருப்பம்
$$= 2a\delta z\,(\rho a + 2\rho z)\,(a + z) ;$$

ஏனெனின் சுயாதீனப் பரப்பின் கீழ் மூலகத்தின் ஆழம் $a + z$ ஆகும்.

$\therefore$ சுயாதீன்ப் பரப்புப்பற்றி மொத்தத் திருபபம்
$$= \int_0^{2a} 2a\,(\rho a + 2\rho z)\,(a + z)\,dz ;$$

இங்கு (பொதுப்பரப்பிலிருந்து அளக்கப்படும்) Z இன் பெறுமானங்களின் வீச்சு O விலிருந்து $2a$ யிற்கு உள்ளது.

ஆயின், சுயாதீனப் பரப்புப் பற்றி மொத்தத் திருப்பம்,

$$= 2a\rho \int_0^{2a} (a+z)(a+2z)\,dz$$

$$= 2a\rho \int_0^{2a} (a^2 + 3az + 2z^2)\,dz$$

$$= 2a\rho \left[a^2 z + \frac{3az^2}{2} + \frac{2z^3}{3}\right]_0^{2a}$$

$$= 2a\rho\,[2a^3 + 6a^3 + \tfrac{16}{3}a^3]$$

$$= \tfrac{80}{3}a^4\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}.$$

அனறியும சதுர அடரின் புவியீர்ப்பு மையத்தில் அமுக்கச் செறிவு

$$= \rho a + 2\rho a = 3a\rho \text{ ஆதலால்}$$

சதுர அடரில் மொத்த உதைப்பு $= (2a)^2.3a\rho$

$$= 12\,a^3\rho.$$

ஆயின, சதுர அடரின் அமுக்க மையம் பொதுப் பரப்பிலிருந்து Z ஆழமாயின் சுயாதீனப பரப்புப் பறறி மொத்த உதைபபின் திருப்பம்

$$= 12a^3\rho\,(Z + a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

இதனை (i) எனபதற்குச் சமப்படுத்த

$$12a^3\rho\,(Z + a) = \tfrac{80}{3}a^4\rho\,;$$

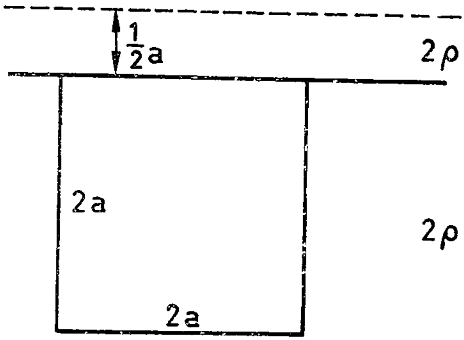
$$\therefore\quad Z + a = \tfrac{80}{36}a$$

$$Z = \frac{20a}{9} - a$$

$$= \frac{11a}{9}.$$

முறை (ii). பொதுப் பரப்பில் அமுக்கச் செறிவு $a\rho$. ஆதலால், நாம் அறிமுறையில மேற்றிரவத்திற்குப் பதிலாக 2ρ அடர்த்தியும் $\frac{1}{2}a$ தடிப்பும் உள்ள ஒரு திரவத்தைப் பிரதி வைக்கலாம். ஏனெனின் பொதுப்பரப்பில அமுக்கச் செறிவாகிய $\frac{1}{2}a(2\rho)$ மீண்டும் $a\rho$ என்பதற்கே சமமாகும் (படம் 73). ஆயின எமது பிரச்சினையானது அறிமுறையாய் சுயாதீனமான பரபபின் கீழ் $\frac{1}{2}a$ எனனும் ஆழத்தில் தன் மேல் ஓரம் கிடையாக இருக்குமாறு 2ρ அடர்த்தியுள்ள ஏகவினத் திரவத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படும் ஒரு சதுரத்தின்

அமுக்க மையத்தைக் காணும் பிரச்சினைக்கு ஒடுங்கும் . இது § 38 (உதாரணம் 1) இல் நாம் தீர்த்த செவ்வகப் பிரச்சினையின் குறிப்பிட்ட வகையாகும்.



படம் 73

அங்கு நிலைக்குத்தான ஓரம் a யாகவும் மேலோரம் h ஆழத்திலும் இருப்பின்

சுயாதீனப் பரப்பின் கீழ் அமுக்க மையத்தின் ஆழம்

$$=\frac{2}{3}\frac{a^2+3ah+3h^2}{a+2h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

எனக் கண்டுள்ளோம்.

இம் முடிபைப் பிரயோகித்து சதுர அடரினது அமுக்க மையததின் ஆழத்தைக காண்பதற்கு a யிற்குப் பதிலாக $2a$ என்பதையும், h இறகுப் பதிலாக $\frac{1}{2}a$ என்பதையும் எழுதுவோம். ஆயின் (iii) தருவது

அறிமுறைச் சுயாதீனப் பரப்பின் கீழ் அமுக்க மையத்தின் ஆழம்

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{4a^2+6a.\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}a^2}{2a+a}$$

$$=\tfrac{31}{18}a.$$

ஆயின் பொதுப் பரப்பின் கீழ் சதுர அடரின் அமுக்க மைய ஆழம்

$$=\tfrac{31}{18}a-\frac{a}{2}$$

$$=\frac{11a}{9}.$$

பயிற்சி V

நீரின் அடர்த்தி கன அடிக்கு 62·5 இரு. என எடுக்க.

1. ஒரு நீர்த்தாங்கி 4 அடி உயரமும் 6 அடி அகலமுமுள்ள செவ்வக வெட்டு உடையது. அது 3 அடி ஆழத்திற்கு நீர்கொள்ளுமிடத்து ஒரு முனையில் மொத்தத் திரவ உதைப்பையும் அடியிலிருந்து அமுக்க மையத்தின் உயரத்தையுங் காண்க.

2. பக்கங்கள் 3 அடி, 4 அடி, 5 அடி ஆக உள்ள ஒரு செங்கோண முக்கோணி அதன் செம்பக்கம் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். திரவ அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

3. ஈற்றுக் கேள்வியில் முக்கோணித் தளம் நிலைக்குத்தாகாது திரவப் பரப்போடு 10° கோணத்தை ஆக்குமாயின் திரவ அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

4. A யிற் செங்கோணமுள்ள ABC எனனும் முக்கோணி AB பரப்பிலிருக்குமாறு கன அடிக்கு 90 இரு. அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப் படும். AB = 2 அடி, AC = 4 அடி ஆயின் முக்கோணியில் மொத்தத் திரவ உதைப்பையும் A, B, C என்பனவற்றிலிருந்து அமுக்க மையத்தினது தூரங்களையுங் காண்க.

5. 14 அடி உயரமும் 10 அடி அகலமும் உள்ள ஒரு பூட்டுப் படலையின் ஒரு பக்கத்தில் 12 அடி உயரத்திற்கும் மற்றைப் பக்கத்தில் 8 அடி உயரத்திற்கும் நீர் உண்டு. அதன்மீதுள்ள விளையுள் உதைப்பின் பருமனையும் அமுக்க மையத்தின் நிலையையும் காண்க.

6. ஒரு பூட்டுப் படலையின் இரு பக்கங்களிலும் உள்ள நீரின் ஆழங்கள் 12 அடியும் 4 அடியும் ஆகும். படலையில் நீரமுக்கத்தால் ஆய விளையுள் விசையைக் கண்டு அது பூட்டின அடியிலிருந்து 52 அங்குல உயரத்திலுள்ள புள்ளியிலே தாக்குமென நிறுவுக. படலையின் அகலம் 15 அடியெனவும் ஒரு கன அடி நீர் 62·5 இரு. நிறையெனவும் எடுக்க. [*Inter. Sc.*]

7. ஒரு நீர்த் தாங்கியின நிலைக்குத்துப் பக்கம் அதன் கிடையான கீழ் ஓரத்தோடு பிணைக்கப்படும் 2 அடி ஓரமுள்ள ஒரு சதுரப் பொறிக் கதவைக் கொள்ளும். இக் கதவு வெளிமுகமாகத் திறவாதிருக்க இதன் மேல ஓரத்தோடு தொடுக்கப்பட்டதும் 18 இரு. நிறையுடைய உயர்ந்த கிடையான உதைப்பைத் தாங்கக்கூடியதுமான ஒரு இழையாற் பிடிக்கப்படும். இக்கதவுப் பரப்பளவின் $\frac{3}{5}$ பங்கு நீரால் மூடப்படுமிடத்து அது திறக்கத் தொடங்குமென நிறுவுக. [*Inter. Sc.*]

8. a, $2a$ பக்கங்கள் உள்ள ஒரு செவ்வக அடர் a நீளமுடைய பக்கம் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். அந்த அடரை ஒரு மூலவிட்டத்தாற் பிரித்தலால் ஆகும் இரு முக்கோணிகளின் அமுக்க மையங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் $\frac{5a}{8}$ எனக் காட்டுக.

9. $2a$ பக்கமுள்ள ABCD என்னுஞ் சதுர அடர் AB பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழத்தப்படும். AB யிற் கிடக்கும் a நீளமுள்ள அடியையும் a உயரத்தையுங் கொண்ட ஒரு முக்கோணிப் பாகம் அகற்றப் படும். எஞ்சிய பாகத்தினுடைய அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க. [*Inter. Sc.*]

10. 6 அடி உயரமுள்ள ABCD என்னுஞ் செவ்வகம் AB என்னும் ஓரம் நீர்ப் பரப்பிலிருக்குமாறு நீரில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். AC, BD என்னும் மூலைவிட்டங்கள் O வில் ஒன்றையொன்று வெட்டும். AOD என்னும் முக்கோணியின் அமுக்க மையம் $3\frac{1}{2}$ அடி ஆழமெனக் காட்டுக. [*Inter. Sc.*]

11. ஒரு செவ்வகத்தின் இரண்டு எதிரான ஓரங்கள் ஒரு திரவப் பரப்பின் கீழ் h, k என்னும் ஆழங்களிலே கிடையாக உள்ளன. அமுக்க மையத்தின் ஆழம்

$$\frac{2}{3}(h^2+hk+k^2)/(h+k)$$

ஆகுமெனை நேரடித் தொகையிடலால் நிறுவுக.

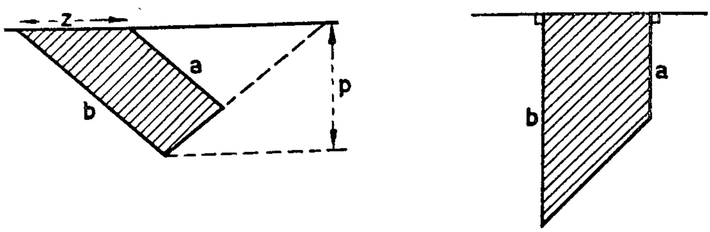
12. ஒரு பக்கம் 9 அடி ஆழத்திற் கிடையாகவும் எதிர்ப் பக்கம் 15 அடி ஆழத்திலும் இருக்குமாறு ஒரு செவ்வகப் பரப்பு நீரில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். அமுக்க மையம் செவ்வக நடுப்புள்ளியின் கீழ் 3 அங்குலத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

13. ஒரு தட்டையான அடியைக் கொண்ட நீர்த்தாங்கி 3 மீற்றர் அகலமுள்ள ஒரு நிலைக்குத்துக் கதவால் இரு கூடங்களாகப் பிரிக்கப்படும். ஒரு கூடம் 10 மீ. ஆழத்திற்குக் கன சதம மீற்றருக்கு 1·5 கிராம் அடர்த்தியுள்ள எண்ணெயால் நிரப்பப்பட்டு மற்றைக் கூடம் 20 மீ. ஆழத்திற்குக் கன சதம மீற்றருக்கு 2·0 கிராம் அடர்த்தியுள்ள வேறொரு எண்ணெயால் நிரப்பப்படுமிடத்து, கதவிலே தாக்கும் விளையுள் நீர்நிலையியல் உதைப்பினது பருமன், திசை, நிலை ஆகியவற்றைக் காண்க.

14. A யிற் செங்கோணமுள்ள ABC என்னும் முக்கோணி A பரப்பிலும் BC கிடையாகவும் இருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். பக்கம் AB (நீளம் a) கிடையோடு θ கோணச் சாய்வு கொள்ளுமாயின் மூன்று பக்கங்களிலிருந்து அமுக்க மையத்தின் செங்குத்துத் தூரங்களைக் காண்க.

15. ஒரு சதுர அடர் தனது தளமும் ஒரு மூலைவிட்டமும் நிலைக்குத்தாகுமாறு ஒரு சீரான திரவத்திற் பகுதியாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். மூலை விட்டத்தின் நீளம் $2a$ ஆகி பரப்பின் மிகத் தாழ்ந்த உச்சியின் ஆழம் $3a/2$ ஆகும். உள்ளாழ்த்தப்படும் பாகத்தினது அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க. [*Inter. Sc.*]

16. கீழே உள்ள இரு வகைகளிலும் அடர் சீரான அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படும். தந்த கணியங்கள்பற்றி அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.



(i) (ii)

17. சமபக்க முக்கோணி வடிவம் கொண்ட ஓர் அடர் ஒரு பக்கம் சுயாதீனப் பரப்பிலிருக்குமாறு நீரில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும்.

ஒரு முகத்தில், அதன அமுக்க மையத்திற்கூடாக வரையப்படுங் கிடைக்கோட்டினா பிரிப்பால் ஆகும் இரு பாகங்களில நீரமுக்கத்தாலாய உதைப்புக்கள சமமென நிறுவுக.

18. பின்வரும் ஒவவொரு வகையிலும அமுக்க மைய ஆழத்தை நேரடித் தொகையிடலாற காண்க.

(i) மேலோரம் (b) h ஆழததிற் கிடையாகுமாறு ஒரு பாயியில நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழத்தப்படும a, b என்னும் பக்கங்கள் உளள செவ்வகம்.

(ii) A பரப்பிலும் BC யானது k ஆழததிற் கிடையாகவும் இருக்குமாறு ஒரு பாயியில் நிலைக்குததாய உள்ளாழததப்படும் ABC எனனும முக்கோணி.

(iii) A யானது k ஆழத்திலும் BC கிடையாக $h+k$ ஆழததிலும் இருக்குமாறு ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உளளாழ்த்தப்படும ABC என்னும முக்கோணி.

19. தன தளம நிலைக்குத்தாகவும் அடி கிடையாகிப பரபபின கீழ் 4 அடி ஆழத்திலும் எதிா உச்சியினமேல 12 அடி உயரததிலும உளள முககோணியினது அமுக்க மையத்தின் நிலையைக் காண்க.

20. C நீர்ப்பரபபிலிருக்க AB கிடையாகுமாறு ABC என்னும் முக்கோணிப பரப்பளவு நீரில நிலைகுததாய் உளளாழ்த்தப்படும். எவவாறு P, Q எனபன முறையே AC, BC என்பனவறறிற புளளியாக இப்பரபபை PQ என்னுங கிடைக் கோட்டாற சம அமுககஙகளாலே தாக்கபபடும் இரு பாகஙகளாகப் பிரிககலாமெனக் காட்டுக.

C யிலிருநது AB யிற்குச செஙகுத்து நீளம் h ஆயின, இவவகையில் AB இறகு மேல APQB எனனும பரப்பளவின அமுக்க மையததின் உயரம

$$\tfrac{1}{8}h\,(3\times 4^{\frac{1}{3}}-4)$$

என நிறுவுக.

21. ஒரு மூலைவிட்டம் நிலைகுததாகத தன மையம் h ஆழத்தில இருககுமாறு ஏகவினத திரவததில முழுவதுமாய உள்ளாழ்ததப்படும் சாய்சதுரத்தின அமுக்க மைய ஆழம் $(d^2+24h^2)/24h$ எனக காட்டுக ; இங்கு d யானது நிலைகுததான மூலைவிட்டததின நீளமாகும்.

22. a நீளமுளள பககஙகளைக கொணட சதுரமொனறு தன் மையம் $h(>a/\sqrt{2})$ எனனும ஆழததிலிருககுமாறு நீரில் நிலைகுததாய உள்ளாழ்ததபபடும. இச்சதுரம் அதன் மையம் பற்றி ஒரு நிலைகுததுத தளததிற் சுழற்றப்படுமாயின் அமுகக மையததின ஆழம மாறிலியாகி $(a^2+12h^2)/12h$ எனபதறகுச சமமாகுமெனக காட்டுக.

23. மேல ஓரம் பரப்பிலும கீழ் ஓரம் a ஆழத்திலும் இருக்குமாறு பரப்பின் கீழுளள ஆழததைபபோல மாறும் அடாததியுள்ள திரவத்தில நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழத்தப படும செவவகத்தினது அமுகக மையத்தின் ஆழத்தைக காணக.

24. உள் ஓரங்கள் 1 அடி நீளமுள்ள ஒரு சதுரமுகிப் பெட்டி அதன் அடி கிடையாகுமாறு வைக்கப்பட்டு அரைப் பஙகு நீராலும் அரைப் பஙகு $13\cdot 6$ தனனீாபபுக் கொண்ட இரசத்தாலும் நிரப்பப்படும. பெட்டியின நிலைகுததது முகமொனறில இருததல நிறையில மொதத உதைபபையும இதன அமுகக மையத்தின ஆழத்தையும் காணக.

25. தனது இரு பககஙகள முறையே a, b எனனும் ஆழங்களிற் கிடையாகுமாறும் பரப்பின கீழுள்ள ஆழத்தைப் போல் மாறும அடர்ததியுள்ள திரவத்தில் ஓர் இணைகரம் நிலைக்குததாய உள்ளாழ்ததப்படும். அமுகக மையத்தின ஆழம் $3(b^4-a^4)/4(b^3-a^3)$ எனக் காட்டுக.

விடை

1. 1687.5 இரு. நிறை, 1 அடி. 2. 1·2 அடி. 3. $2\frac{1}{2}$ அங்.

4. 480 இரு. நிறை, $AH = CH = \sqrt{5}$ அடி, $BH = 2\frac{1}{2}$ அடி.

5. 25,000 இரு. நிறை, படலையின் அடிக்கு மேல 5·067 அடி.

6. 60,000 இரு. நிறை. 9. $63a/46$.

13. 975,000 கி. கி. நிறை, கிடையாக, 7·436 மீ. நீர்த்தாங்கிக்கு மேல்.

14. AC யிலிருநது $\frac{3a}{8}$, AB யிலிருந்து $3a$ தான் $\frac{\theta}{8}$, BC இலிருந்து a சைன் $\frac{\theta}{4}$.

15. $\frac{79a}{100}$. 16. (i) $\frac{p}{2b} \cdot \frac{b^4 - a^4}{b^3 - a^3}$; (ii) $\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{2(a^2+ab+b^2)}$.

18. (i) $\frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 + 3ak + 3h^2}{a + 2h}$; (ii) $\frac{3h}{4}$; (iii) $\frac{6k^2 + 8kh + 3h^2}{2(3k + 2h)}$.

19. இடையககோட்டில 9 அடி ஆழத்தில். 23. $\frac{3a}{4}$.

24. 129·7 இரு. நிறை, பரப்பின கீழ் 0·79 அடி

அதிகாரம் VI

பாரமான பாயிகளின் அமுக்கம் (4)

அமுக்க மையம்பற்றிய கூடுதலான ஆராய்வு

41. முன்னுரை

இவ்வதிகாரத்தில் நாம் முதன முதலாகப் பாயிப் பரப்பின் கீழ் ஒரு தளப் பரப்பளவின அமுக்க மைய ஆழத்திற்கும் பாயிப் பரப்பிலுள்ள ஓர் அச்சுப்பறறி அத்தளப் பரப்பளவின சடத்துவத திருப்பத்திற்கும் உள்ள தொடர்பை மெய்ப்படுத்தலால் எமது நீர்நிலையியல் அறிவையும் இயக்க வியல அறிவையும் இணைப்போம். இரண்டாவதாக அணை சுவர்கள், அணைகள் என்பனவற்றின அமைப்புக்கு அடிப்படையாகும் ஆரம்பக் கொள் கையை ஆராய்ந்து அமுக்க மைய நிலையின் சில செய்முறைப பிரயோகங்களை நோக்குவோம்.

42. ஒரு தளப் பரப்பளவினது அமுக்க மையத்தின் ஆழம் அதன் சடத்துவத் திருப்பத்திலிருந்து பெறப்படுதல்

§ 26 இல் ஒரு பாயியில் உள்ளாழ்த்தப்படும் தளப்பரப்பில் உஞற்றப்படும் மொத்த உதைப்பு, அதன பரப்பளவு, புவியீர்ப்பு மைய ஆழம் என்பன வறறை அறிவதனமூலம் மிக விரைவாய்ப பெறப்படலாம் எனக் கண்டுள் ளோம். ஏறக் குறைய இதே மாதிரி ஒரு பரப்பளவின் அமுக்க மைய ஆழத்தை அதன் சடத்துவத் திருப்பத்தை அறிவதன்மூலம் நாம் பெறலாம். (*Tutorial Dynamics* § 265 ஐப் பார்க்க).

§ 33 எனபதை மீண்டும் பார்க்க. அங்கு Z என்னும் அமுக்க மையததின் ஆழம்

$$Z = \frac{\underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \sum_{1}^{n} a_r z_r^2}{\underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \sum_{1}^{n} a_r z_r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

என்பதாலே தரப்படும் எனக் கண்டுள்ளோம். [சமன்பாடு (iii)].

$\underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \sum_{1}^{n} a_r z_r^2$ என்னுங் கோவை, உருவத்தின் தளமும் பாயிப் பரப்பும் ஒன்றையொனறு வெட்டுங் கோடுபற்றிப் பரப்பளவின் இரண்டாம் திருப்பமா கும், அதாவது இக்கணியம் பாயிப் பரப்பிலுள்ள இக்கோடுபற்றிப் பரப்பளவின்

சடத்துவத் திருப்பமாகும். முழுப் பரப்பளவை A என்பதாலும் (அதாவது $A = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$) பாயிப் பரப்புக் கோடுபற்றிச் " சுழிப்பு ஆரை " யை k_s என்பதாலும் குறிப்போமாயின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$$Ak_s^2 = \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \sum_{1}^{n} a_r z_r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}.$$

மறுபடியும் $\bar{z}$ ஆனது பாயிப் பரப்பின் கீழ் உருவப் பரப்பளவினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழத்தைக் குறிக்குமாயின் புவியீர்ப்பு மையத்தின வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$$A\bar{z} = \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \sum_{1}^{n} a_r z_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}.$$

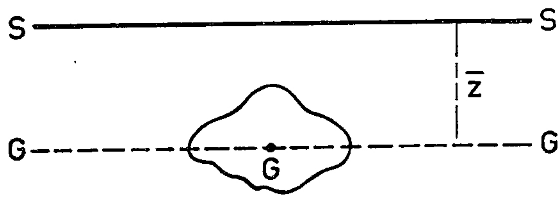
(ii), (iii) என்னுந் தொடர்புகளை (i) இற் பிரயோகிக்க

$$Z = \frac{Ak_s^2}{A\bar{z}}$$

$$= \frac{k_s^2}{\bar{z}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iv)}.$$

எனப் பெறுவோம்.

ஆகவே பாயிப் பரப்புப் பற்றி உருவப் பரப்பளவினது சுழிப்பு ஆரையின் வர்க்கத்தை (பாயிப் பரப்பின கீழ) புவியீர்ப்பு மையத்தின ஆழத்தால் வகுத்தலால பாயிப் பரப்பின் கீழ் அமுக்க மையததின ஆழம் பெறப்படும்.



படம் 74

சமாந்தர அச்சுத் தேற்றத்தால் (*Tutorial Dynamics*, § 268) SS (படம் 74) என்னும் பாயிப் பரப்புக் கோடுபற்றிச் சுழிப்பு ஆரையை, உருவப் பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கூடாக SS இறகுச் சமாந்தரமாய் வரையப்படும் GG என்னும் ஒரு கோடுபற்றிய சுழிப்பு ஆரையின் சார்பாயும் புவியீர்ப்பு மைய ஆழத்தின் சார்பாயும் உணர்த்தலால் இம் முடிபைக் கூடுதலாக இசைவான வடிவத்தில் நாம் பெறலாம்.

இத்தேற்றம்

$$k_s^2 = k_g^2 + \bar{z}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(v)}$$

எனக் கூறும்; இங்கு k_g ஆனது பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்திற் கூடாகச் செல்லும் GG என்னும் அச்சுபற்றிச் சுழிப்பு ஆரையாகும்.
ஆயின் (iv) தருவது

$$Z=\frac{k_g^2+\bar{z}^2}{\bar{z}}$$

$$=\frac{k_g^2}{\bar{z}}+\bar{z} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;\text{(vi)}.$$

ஆகவே பாயிப் பரப்பின் கீழ் பரப்பளவினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழமும் உருவத் தளத்தில் பரப்பளவின் புவியீர்ப்பு மையத்திற் கூடாகச் செல்லும் கிடை அச்சுப்பற்றிப் பரப்பளவின சுழிப்பு ஆரையும் எமக்குத் தெரியுமாயின் நாம் அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தை உடனடியாக எழுதலாம்.

அமுக்க மையத்தின் நிலை அலைவு மையத்தோடு பொருந்துமென்பது இங்கு கவனிககப்படலாம் (*Tutorial Dynamics* § 286, § 287 ஐப் பார்க்க). அதாவது பாயிப் பரப்பில் தாளின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான கிடைக்கோடு பற்றி இவ்வுடல் அலையுமாறு செய்தால் அமுக்க மையத்தின் ஆழம் எளிய சமான ஊசலின் நீளத்திற்குச் சமமாகும்.

உதாரணம் 1. இரண்டு ஓரங்கள் கிடையாகுமாறும் அவற்றுள் மேல் ஓரம் h ஆழத்தில இருக்குமாறும் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் செவ்வகத்தினது அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க ; நிலைக்குத்து ஓரங்கள் a நீளமாகும்.

இச்செவ்கத்திற்கு

$$k_g^2=\frac{a^2}{12}, \; (\textit{Tutorial Dynamics}, \S\, 270)$$

$$\bar{z}=h+\tfrac{1}{2}a.$$

ஆகவே

$$Z=\frac{a^2}{12\,(h+\frac{1}{2}a)}+h+\tfrac{1}{2}a$$

$$=\frac{a^2+3\,(a+2h)^2}{6\,(a+2h)}$$

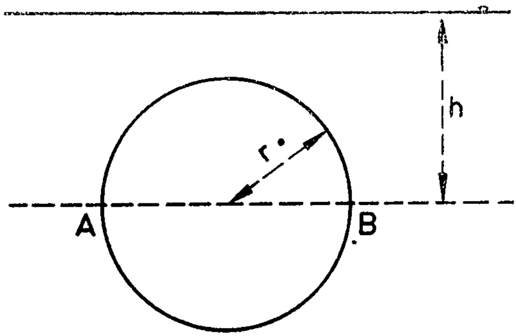
$$=\frac{4a^2+12ah+12h^2}{6\,(a+2h)}$$

$$=\tfrac{2}{3}\,\frac{a^2+3ah+3h^2}{a+2h}.$$

§ 38 உதாரணம் 1 இல் இம்முடிபை நாம் பெற்றுள்ளோம்.

உதாரணம் 2. ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் வட்டத்தினது அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

வட்டத்தின் ஆரை r எனவும் (படம் 75) பரப்பின் கீழ் அதன் மையத்தின் ஆழம் h $(h > r)$ எனவும் உத்தேசிக்க.



படம் 75

AB என்னும் விட்டம் பற்றி சுழிப்பு ஆரை $\frac{1}{2}r$ ஆகும (*Tutorial Dynamics*, § 276).

$$\therefore \quad k_g{}^2 = \frac{r^2}{4}.$$

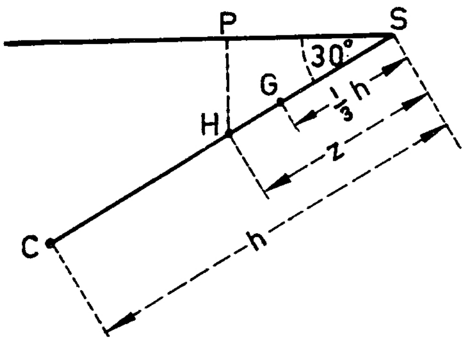
வட்டத்ினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் h ஆகும்.

ஆயின் $$Z = \frac{r^2}{4h} + h.$$

வட்டத்தின் பரிதி திரவப் பரப்பைத் தொடும் வகையில் $h = r$ ஆகி

$$Z = r + \tfrac{1}{4}r = \frac{5r}{4} \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 3. AB பரப்பிலிருக்குமாறும் CD நிலைக்குத்தோடு 60° சாய்விலிருக்குமாறும் ABC என்னும் ஒரு முக்கோணி ஒரு திரவத்தில் உள்ளாழ்த்தப் படும். இங்கு D என்பது C யிலிருந்து AB யிற்கு வரையப்படுஞ் செங்குத்தின் அடியாகும். ஆயின், அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.



படம் 76

$CD = h$ ஆகுக. படம் 67 ஒரு முனைப்பார்வையைக் குறிக்கும். G, H என்பன முறையே புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையும் அமுக்கமையத்தின் நிலையுமாகும். S என்பது முக்கோணித் தள

மும் பாயிப்பரப்பளவும் ஒன்றையொன்று வெட்டுங் கோட்டினது முனைப் பார்வையாகும்.

ஆயின் S இலிருந்து G யின் தூரம் $\frac{1}{2}h$ ஆகும். S இலிருந்து **H** இன் தூரத்தை Z என்பதாற் குறிப்போமாயின்

$$Z=\frac{k_s^2}{\bar{z}}.$$

இங்கு $\bar{z}$ ஆனது முக்கோணித் தளத்தில் அளக்கப்படும் (§ 39 ஐப் பார்க்க). அதாவது $\frac{1}{3}h$.

AB என்னும் பக்கம்பற்றி முக்கோணியின் சுழிப்பு ஆரையின் வர்க்கம் $\frac{h^2}{6}$ ஆதலால (*Tutorial Dynamics* § 274 ஐப் பார்க்க.)

$$Z=\frac{h^2}{6\cdot\frac{h}{3}}=\frac{1}{2}h.$$

ஆயின் PH (அமுக்க மையத்தின ஆழம்)

$$\begin{aligned}&=Z\text{ கோசை }60^\circ,\ (\S\,39\text{ ஆல்}).\\&=\tfrac{1}{2}h\cdot\tfrac{1}{2},\\&=\tfrac{1}{4}h.\end{aligned}$$

43. ஒரு பாயியில் உள்ளாழ்த்தப்படும் யாதும் ஒரு தளப் பரப்பளவானது கிடையல்லாவிடின் அதன் அமுக்க மையத்தின் ஆழம் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழத்திலும் பெரிதாகும்.

பரப்பளவு நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படுமாயின் நாம் முன்னர் வழங்கிய குறிப்பீட்டினபடி Z ஆனது அமுக்க மைய ஆழத்தையும் $\bar{z}$ ஆனது புவியீர்ப்பு மைய ஆழத்தையுங் குறிக்கும்.

பரப்பளவு ஒரு கோணத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படுமாயின Z, $\bar{z}$ எனபன உருவத்தின் தளமும பாயிப் பரபபும் ஒன்றையொனறு வெட்டுங் கோட்டிலிருந்து முறையே அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தையும் புவியீர்பபு மையத்தின ஆழததையுங் குறிக்குமெனக் கொள்வோம் (§ 39 பார்க்க).

பரப்பளவு கிடையாயின் அமுக்க மையமும் புவியீர்ப்பு மையமும் பரப்பளவிலுள்ள புள்ளிகளாதலால் அவை ஒரே ஆழத்திலிருக்கும்.

ஈற்றுப் பிரிவிலிருந்து [சமன்பாடு (vi)]

$$Z=\frac{k_g^2}{\bar{z}}+\bar{z};$$

இங்கு k_g யானது புவியீர்ப்பு **மையத்**திற்கூடாகச் செல்லுங் கிடைக்கோடு பற்றி உருவத்தின் சுழிப்பு ஆரையா**கும்.**

ஆயின் $$Z - \bar{z} = \frac{k_g^2}{\bar{z}}.$$

k_g^2 எனபது பிரதானமாக நேர் ஆதலால் $\frac{k_g^2}{\bar{z}} > 0$ ஆகி

$$Z > \bar{z} \text{ ஆகும்.}$$

யாதும் ஒரு குறிப்பிட்ட உருவத்திற்கு k_g^2 என்பது மாறுப பெறுமானத்தை உடையதாதலால் $\bar{z} \to \infty$ ஆக

$$\frac{k_g^2}{\bar{z}} \to 0$$

ஆகுமெனக் கவனிப்போம். அதாவது, புவியீர்ப்பு மையத்திற்கும் அமுக்க மையத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரம் முடிவில்லா ஆழத்திலேயே பூச்சியமாகும்.

உதாரணம் 1. இரு பக்கங்கள் இடையாகவும் மேலே உள்ளது h ஆழத்திலும் இருக்குமாறு ஒரு செவ்வகம் ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். அமுக்க மையம் புவியீர்ப்பு மையத்திலும் கூடிய ஆழத்திலிருக்குமெனக் காட்டி, அமுக்க மையம் புவியீர்ப்பு மையங்களினது ஆழ வித்தியாசம் $\frac{1}{100}a$ ஆகுமாறு h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இங்கு a யானது செவ்வகத்தின் நிலைக்குத்தான பக்கத்தின் நீளமாகும்.

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம $h + \frac{a}{2}$ ஆகும.

அமுக்க மையத்தின் ஆழம $\frac{2}{3}\ \frac{(a^2+3ah+3h^2)}{a+2h}$ ஆகும : §38, உதாரணம் 1 ஐப் பார்க்க.

ஆகவே அமுக்க மையத்தின் ஆழம் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழத்திலும் பார்க்கப் பெரிதாதற்கு

$$\frac{2}{3}\ \frac{(a^2+3ah+3h^2)}{a+2h} > h + \frac{a}{2},$$

அல்லது $$4(a^2+3ah+3h^2) > 3(a+2h)^2,$$

அல்லது $$4a^2+12ah+12h^2 > 3a^2+12ah+12h^2,$$

அல்லது $$a^2 > 0$$

ஆக வேண்டும். இது என்றும் உண்மையாகும். அமுக்க மையம், புவியீர்பபு மையம் எனபவற்றின் ஆழ வித்தியாசம்

$$= \frac{2}{3}\ \frac{(a^2+3ah+3h^2)}{a+2h} - \left(h + \frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{a^2}{6(a+2h)};$$

$h=0$ ஆகுமிடத்து இவ் வித்தியாசம் $=\frac{a}{6}$. (இது வேறு மாதிரியுந் தெளி வாகும் ; ஏனெனின் செவ்வகத்தின் ஒரு பக்கம் பரப்பிலிருத்தலால் இவ் வித்தியாசம் $\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a$ ஆகும்).

$h\to\infty$ ஆக, $\frac{a^2}{6(a+2h)}\to 0$ ஆதலால், உள்ளாழ்த்தப்படும் ஆழம் கூடக்கூட புவியீர்ப்பு மையமும் ஏறக்குறையப் பொருந்தும்.

$$\frac{a^2}{6(a+2h)}=\tfrac{1}{100}a \qquad \text{ஆகுமிடதது}$$

$$100a^2=6a^2+12ah\ ,$$

அல்லது $$94a=12h$$

அல்லது $$h=\tfrac{94}{12}a=7{\cdot}83a\ :$$

அதாவது அமுக்க மையம் புவியீர்ப்பு மையம் ஆகியவற்றின் ஆழ வித்தி யாசம் $\frac{1}{100}a$ ஆகமுன்னர் மேல் ஓரம் $7{\cdot}83a$ என்னும் ஆழத்திலிருக்கும்.

44. அமுக்க மையங்களின் வரைபுமுறைத் துணிபு

அதிகாரம் IV (§32) இல் ஓா உள்ளாழ்த்தப்பட்ட பரப்பளவில் மொத்த உதைப்பைக் காண்பதறகு ஒரு வரைபு முறையை எடுத்து நோக்கிஞேம். அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்பதறகும் இம்முறை விரிக்கப்படலாம்.

முதலாவது பெற்ற உருவத்தினது பெற்ற உருவமாகிய இரண்டாவது பெற்ற உருவத்தின் பரப்பளவையே நாம் காணவேண்டும் (படம் 77).

முதலாவது பெற்று உருவத்தின் CD என்னும் வகை மூலகத்தை எடுத்து நோக்குக. C, D என்பனவற்றிலிருந்து XX என்னுந்தரவுக் கோட்டுக்குச் செங்குத்துககள வரைந்து இச்செங்குத்து அடிகளை O விற்குத் தொடுக்க. இக்கோடுகள் C, D என்பனவற்றிற்கிடையே c_r என்னும் நீளத்தைக் வெட்டுக.

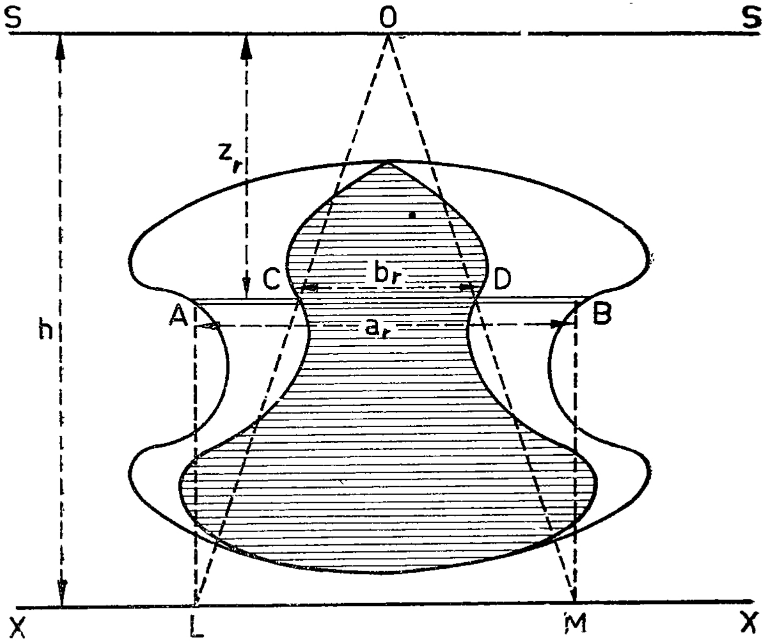
ஆயின், முதலாவது பெற்ற உருவத்தின் வகையிலுள்ளதுபோல் இவ வாறு உருவான இயல்பொத்த முக்கோணிகளிலிருந்து

$$\frac{c_r}{z_r}=\frac{b_r}{h}$$

அல்லது $$b_r z_r = h c_r \qquad\qquad (1).$$

பரப்பின் கீழ் அமுக்க மையத்தின் ஆழம் (Z)

$$Z=\frac{\underset{n\to\infty}{\text{எல்}}\ \sum_{r=1}^{n}\rho a_r l z_r^2}{\underset{n\to\infty}{\text{எல்}}\ \sum_{r=1}^{n}\rho a_r l z_r}$$



படம் 77

$$= \frac{\underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \sum_{r=1}^{n} \rho a_r l z_r^2}{\text{மொத்த உதைப்பு}}$$

$$= \frac{\underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \sum_{r=1}^{n} \rho a_r l z_r^2}{\rho A_1 h} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

என்பதாலே தரப்படும் (§ 32).

முதலாவது பெற்ற உருவத்தைக் காணுமிடத்து, வகைக் கீலத்திற்கு

$$a_r z_r = h\, b_r$$

என்னுந் தொடர்பைப் பெறுவோம்.

$$\therefore \quad \rho l a_r z_r^2 = \rho l h b_r z_r = \rho l h^2 c_r, \quad \text{(i) இலிருந்து-}$$

$$= \rho h^2 \underset{n\to\infty}{\text{எல்}} \sum_{r=1}^{n} l c_r$$

$$= \rho h^2 A_2 \, ;$$

இங்கு A_2 இரண்டாவது பெற்ற உருவத்தின் பரப்பளவாகும். ஆகவே

$$A_2 = \text{எல்}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} lc_r.$$

(ii) என்னுந் தொடர்பை வழங்க

$$Z = \frac{\rho A_2 h^2}{\rho A_1 h}$$

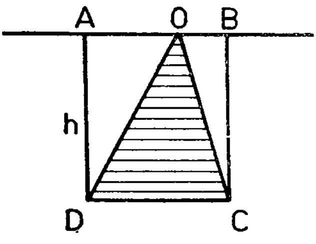
$$= \frac{A_2}{A_1} h$$

$$= \frac{\text{இரண்டாவது பெற்ற உருவத்தின் பரப்பளவு}}{\text{முதலாவது பெற்ற உருவத்தின் பரப்பளவு}} \times h.$$

§ 32 இன் இறுதியிலுள்ள குறிப்பிலிருந்து இதன் கருத்து தொடக்க உருவத்தின் அமுக்க மையத்தின் நிலையானது முதலாவது பெற்ற உருவத்தினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் அதே நிலையாகும் என்பதைக் கவனிக்க.

உதாரணம் 1. ஒரு பக்கம் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு பாயியில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படுஞ் செவ்வகத்தினுடைய அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைத் துணிதற்கு மேலுள்ள முறையை வழங்கல்.

பொதுவாக, முதலாவது பெற்ற உருவமும் இரண்டாவது பெற்ற உருவமும ஒழுங்கற்றவை. கணிப்பு முறையால் இவற்றின் பரப்பளவுகளைக் காண இயலாதாகையால் செய்முறையால் அவற்றைக் காணும் திறனிலேயே மேலுள்ள முறைகளின உபயோகங்கள் தங்கியிருக்கும். எனினும் ஒரு செவ்வகத்தின் வகையில் முதலாவது பெற்ற உருவம் நேர்ப்பக்கங்கள் உடையது. எமது முடிபுகளைப் பின்வருமாறு உறுதிப்படுததலாம்.



படம் 78

ABCD (படம் 78) செவ்வகத்தைக் குறிக்க. தேர்ந்த முனைவு O ஆயின் ODC என்னும் முக்கோணி முதலாவது பெறற உருவமாதலால், ABCD என்னுஞ் செவ்வகத்தினது அமுக்க மையத்தின் ஆழம் $= \triangle$ODC யினது புவியீர்ப்பு மையத்தின ஆழம்.

இங்கு h ஆனது செவ்வகத்தின நிலைகுத்துப் பக்கத்தின் நீளமாகும். முன்னர் இதே முடிபை வேறு முறைகளாற் பெற்றுள்ளோம்.

45. பயன்படு பரப்பு

ஈற்று இரண்டு அதிகாரங்களிலும் உள்ளாழ்த்தப்பட்ட ஒரு தளப்பரப்பளவில் திரவத்தால் மட்டும் ஆய மொத்த உதைப்பு, அமுக்க மையம், என்பன

வற்றை முதன்மையாய் அவாவினேம். ஆகவே,

z ஆழத்தில் திரவத்தால் மட்டும் ஆய அமுக்கச் செறிவு$=\rho z$

என நாம் எடுத்தலால், திரவத்தில் ஓர் ஆழத்திலுள்ள அமுக்கச் செறிவு பற்றிய கோவையிலிருந்து வளிமண்டல அமுக்கத்தை விலக்கியுள்ளோம்.

யாதும் ஒரு காரணத்தால் ஒரு தளப்பரப்பில் தனி மொத்த உதைப்பு வேண்டுமாயின் (§ 17 ஐப் பார்க்க)

z ஆழத்தில் அமுக்கச் செறிவு$=\mathrm{P}+\rho z$,

என்பதை நாம் பிரயோகிக்க வேண்டும்; இங்கு P யானது வளிமண்டல அமுக்கமாகும். நாம் எடுத்து நோக்கும் திரவத்தில் ρ என்னும் அதே அடர்த்தியும் h உயரமும் உள்ள ஒரு திரவப்படை மீபொருத்தப் படுமெனக் கற்பனை செய்தலால் இது மிக எளிதாய்ச் செய்யப்படலாம். மீபொருத்திய திரவததால் மட்டும் ஆய அமுக்கச் செறிவு அதிகரிப்பு வளிமணடல அமுக்கத்திற்குச் சமமாகவேண்டும். h ஆனது $\mathrm{P}=\rho h$ என்பதால் தரப்படுமாயின இது உண்மையாகி

z ஆழத்தில் அமுககச் செறிவு$=\rho h+\rho z$

$=\rho(h+z)$ ஆகும்.

செயல்முறையளவில், வளிமண்டல அமுக்கத்தை உள்ளடககுதல் ; உண்மை யான பரப்பளவின் மேல் h தடிப்புள்ள திரவப்படை ஒன்று மீபொருத்தப படும் எனவும், இப்படையின் கற்பனையான பரப்பில வளிமண்டல அமுக்கம் தாக்காதெனவும் உத்தேசித்தலைப போனறது என்பதையே இது குறிக்கிறது. இககற்பனைப பரபபு **பயன்படு பரப்பு** எனக கூறபபடும்.

உதாரணம். **வளிமண்டல அமுக்கம் சதுர அங்குலத்திற்கு 14·7 இரு. நிறை ஆயின் கன அடிக்கு $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையாகும் நீருக்குரிய பயன்படு பரப்பின் உயரத்தைக் காண்க.**

பயன்படு பரப்பின உயரம்

$$\rho h=14{\cdot}7 \text{ இரு/சதுர அங்.}$$
$$=14{\cdot}7\times 144 \text{ இரு./சதுர அடி}$$

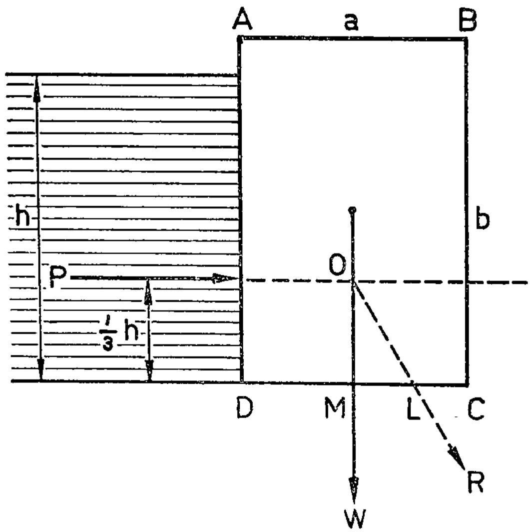
என்பதாலே தரப்படும்.

$$\therefore \quad h=\frac{14{\cdot}7\times 144}{62\frac{1}{2}} \text{ அடி}$$
$$=33{\cdot}87 \text{ அடி.}$$

பயனபடு பரப்பு என்னும் எண்ணக்கரு ஒரு தளப்பரப்பளவில மொத்தத் திரவ உதைப்பு, திரவ அமுக்க மையம், என்பனவற்றிலிருநது வேறுகும் தனி மொத்த உதைப்பு, தனி அமுக்க மையம், என்பனவற்றைக் காண்பதற்குப் பிரயோகிக்கபபடலாம்.

46. செய்முறைப் பிரயோகங்கள் : அணை சுவர்களும் அணைகளும்

உளளாழ்த்தப்பட்ட பரப்பளவில் மொத்தத் திரவ உதைப்பும் அதன் விளையுளினது நிலையைப் பற்றியும் நாம் பெறற அறிவின் மிக முக்கியமான செய்முறைப பிரயோகம் அணை சுவர்கள் அணைகள் ஆகியவற்றின அமைப் பில் நிகழும்.



படம் 79

செவ்வக வெட்டுடைய மிக எளிய வகையாகிய சேமிப்புச் சுவரை நாம் எடுத்து அது திரவத்தின் குறித்த ஒரு உயரத்தைச் சேமிக்குமிடத்து அதன் அலகு நீளத்தில் தாக்கும் விசைகளை எடுத்து நோக்குவோம். இதனிலிருந்து சுவரானது (a) மேற்றிரும்பலால் அல்லது (b) உடைதலால் பிழையாகாது இருத்தற்குச் சுவருக்கு வேண்டிய தடிப்பை நாம் துணிய லாம்.

(a) மேற்றிரும்பலால் ஆகுந் தோல்வி : ABCD (படம் 79) ஆனது h அடி ஆழமுடைய திரவத்தைச் சேமிக்கும் சுவரின் வெட்டைக் குறிக்க. அச் சுவரின் உயரம் b அடியும் தடிப்பு a அடியுமாகுக.

திரவத்தின் உதைப்பு(P) அடியின மேல் $3h$ உயரத்திலே தாக்க சுவரின் நிறை(W) சுவரின் புவியீர்ப்பு மையத்திற் கூடாகத் தாக்கும். இவ்விரு விசைகளும் சுவரின் அலகு நீளத்திலுள்ள விசைகளாகும். மேற்றிரும் பல் C என்னும் மூலைபற்றியே நிகழுமாதலால், C பற்றி W வின்

திருப்பம் C பற்றி P யின் திருப்பத்திலும் பெரிதாகுமாயின் சுவர் மேற்றிரும்பாது என்பது வெளிப்படை. ஆகவே,

$$W \times \tfrac{1}{2}a > P \times \tfrac{1}{3}h \quad \text{.........(i)}$$

ஆயின், சுவர் மேற்றிரும்பாது.

சுவரின் சடப்பொருள் கன அடிக்கு w இரு. நிறையாயின் 1 அடி நீளமுடைய சுவரின் நிறை (W) ஆனது wab இரு. நிறை ஆகும்.

திரவத்தின அடர்த்தி கன அடிக்கு ρ இரு. ஆயின், மொத்த உதைப்புக்குரிய நெறியிலிருந்து

$$P = \rho h \times \frac{h}{2} \text{ இரு. நிறை.}$$

P, W என்பனவற்றின் இப்பெறுமானங்களை (i) என்பதிற் பிரதியிட

$$\tfrac{1}{2}wa^2b > \tfrac{1}{6}\rho h^3$$

அல்லது

$$a^2 > \frac{\rho h^3}{3wb}$$

ஆயின் சுவர் மேற்றிரும்பாது.

b, h என்பன நிலைத்த கணியங்கள எனக் கொளளுமிடத்து சுவர் மேற்றிரும்பாது இருத்தற்கு வேண்டிய a என்னுந தடிப்பு இதனாலே துணியப்படும்.

P, W என்பனவற்றின் விளையுளினது தாக்கக் கோட்டின் நிலையைக் காணும் முறையாலும் இதே முடிபை நாம் பெறலாம். உடைக்கும் விசையை எடுத்து நோக்குமிடத்து இம்முறை நாம் பின்னர் காண்பதுபோல, நயமுடையதாகும்.

O (படம் 79) ஆனது P, W என்னும் விசைகளின் வெட்டுப் புள்ளியாகுக. இவ்விசைகளின் விளையுள் (R)ஆனது CD என்னும் அடியை L லில் வெட்டுக. ஆயின், M ஆனது CD யின் நடுப்புள்ளியாயின், OLM என்னும் முக்கோணி விசை முக்கோணியாதலால்

$$\frac{W}{OM} = \frac{P}{LM} = \frac{R}{OL}.$$

முதற் சமன்பாடு தருவது

$$LM = \frac{P}{W}\cdot OM$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\rho h^2}{wab}\cdot\frac{h}{3}$$

$$= \frac{\rho h^3}{6wab}.$$

L லானது C யின் இடது பக்கத்தில் இருக்குமாயின் சுவர் மேற்றிரும பாது என்பது தெளிவாகும். அதாவது,

$$LM < \frac{a}{2} \quad \text{ஆயின,}$$

அல்லது
$$\frac{a}{2} > \frac{\rho h^3}{6wab} \quad \text{ஆயின,}$$

அல்லது
$$a^2 > \frac{\rho h^3}{3wb} \quad \text{ஆயின்.}$$

இதுவே நாம் முன்னர் பெற்ற முடிபு.

(*b*) **உடைதலால் ஆகுந் தோல்வி.** பொதுவாக, ஒரு சுவர் மேற்றிரும பலாலே தவற முனனர் அது நெருககப்படுதலாலே தவறும. இந்நிகழ்சசி யைத தூணடுமாறு உளள அததகைப புள்ளியிற, சுவரின நிறை திரவத்தின உதைப்பு ஆகியவற்றின் விளையுள் தாக்காதவாறு சுவா நிர்மாணிக்கப்படும் போது கவனம் செலுததபபடவேணடும். ஒரு கற்கட்டுச சுவரானது இழுவைத தகைப்பைத தாங்கக்கூடியதாக இருக்கவேண்டும் என எதிர்பார்க்கப்படவில்லை எனவும் நெருக்குத் தகைப்பை மட்டும் தாஙகக கூடியதாக இருககவேண்டும் எனவும் உத்தேசிககப்படுகிறது. சுவரில் யாதும் இழுவைத தகைப்பு இல்லாதிருத்தற்கு விளையுள விசை சுவர் அடியை சுவாத் தடிப்பின மூனறு சமபாகஙகளுள் நடுப்பாகததில் வெட்ட வேண்டும் என நீரியல் நூலகளிற காடடபபடும்.

படம் 79 இல் சுவர் அடிக்குக் குறுககாக யாதும இழுவைத தகைபபு இல்லாதிருததறகு இவ்வெடுகோளின்படி

$$LM < \frac{a}{6} \quad \text{ஆகவேண்டும்;}$$

அதாவது
$$\frac{\rho h^3}{6wab} < \frac{a}{6},$$

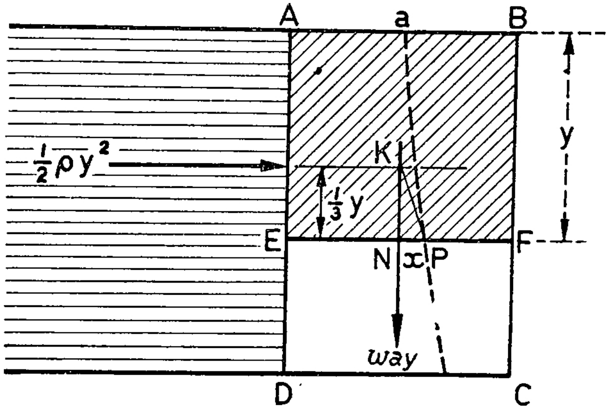
அல்லது
$$a^2 > \frac{\rho h^3}{wab};$$

இது, மேற்றிருமபலை மட்டும் தடுத்தறகு வேணடிய தடிபபிலும் பெரிதான காப்புத் தடிப்பைத தரும்.

இதுவரை நாம் அணை சுவர் முழுவதையும் எடுதது நோக்கினோம. ஆனால் அடி பற்றி அதன் உறுதிபபாட்டை மட்டுமனறி யாதுமொரு கிடைத தளம்பற்றிச் சுவரின யாதுமொரு பாகததின் உறுதிப்பாட்டையும் ஆராய வேண்டும் என்பது தெளிவாகும்.

செவவக வெட்டுளள அதே சுவரை எடுதது நோக்குக. ஆனால், எளிமையின பொருட்டு திரவம சுவர் உச்சிக்கு எழுமென உத்தேசிக்க. EF படம் (80) ஆனது சுவர் உச்சியின் கீழ் *y* ஆழத்தில் உள்ள

சுவரின் யாதும் ஒரு கிடை வெட்டாகுக. ABFE என்னும் பாகத்தில் தாக்கும் விசைகளை நாம் எடுத்து நோக்கி, அவற்றின் விளையுள் EF எனனுந் தளத்தை வெட்டும் புள்ளியாகிய P என்பதைக் காணலாம்; P யின் ஒழுக்கு சுவரின் **தடைக் கோடு** எனப்படும்.



படம் 80

நாம் எடுத்து நோக்கும ABFE என்னும் பாகததில் தாக்கும் விசைகளாவன ; $w.ay$ ஆகும் அதன நிறையும, EF இறகு மேல் $\frac{1}{3}y$ என்னுந் தூரத்திலே தாக்கும் $(\frac{1}{2}\rho y^2)$ என்னுந் திரவ உதைப்புமாகும். இவ்விரு விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் ஒன்றையொனறு வெட்டும் புளளி K யாகி EF இன நடுப்புள்ளி N ஆயின, முன்போல KNP யானது விசை முக்கோணியாகி

$$\frac{way}{\text{KN}} = \frac{\frac{1}{2}\rho y^2}{\text{NP}} \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

NP என்பதை x ஆற குறிப்போமாயின் இது தருவது

$$\frac{way}{\frac{1}{3}y} = \frac{\frac{1}{2}\rho y^2}{x},$$

அல்லது
$$y^2 = \frac{6wa}{\rho}x.$$

இவ்வகையில் தடைக்கோடு ஒரு பரவளைவு ஆகும என்பதை இது காடடும் ; $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=0$ ஆதலால், இப்பரவளைவு AB யின் நடுப் புள்ளிக் கூடாகச் செல்லும்.

சுவரில் எங்கேனும் இழுவைத் தகைப்பு இல்லாதிருக்க வேணடுமாயின் சுவரின யாதுமொரு கிடை வெட்டின் மேல உளள சுவர்ப் பாகததிலே

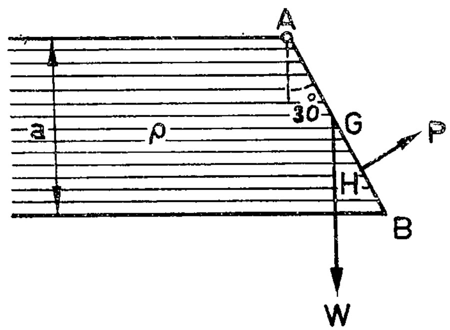
தாக்கும் விசைகளின் விளையுள் இவ்வெட்டை அதன் தடிப்பின் நடு மூன்றிலொரு பங்கில் வெட்ட வேண்டும்; அதாவது, தடைக்கோடு முழுவதும் சுவரின் நடு மூன்றிலொரு பங்கிற் கிடக்க வேண்டும்.

ஒரு சுவர் அல்லது அணை நிர்மாணிக்கப்படும்போது கவனிக்கப்பட வேண்டிய வேறு பல பிரச்சினைகளுண்டு. உதாரணமாக, சுவர் அடியின் கீழ் திரவததினை ஊடுருவலைத தடுத்தல் அல்லது அனுமதித்தல், இவ் வூடுருவலால் ஆக்கப்படும் மேலுதைப்பு போன்றவற்றைக் கூறலாம். ஒரு செய்முறை எந்திரி வேலை செய்தற்கு அடிமூலமாகும் சில நீர்நிலையியற கோட்பாடுகளைக் காட்டுதறகு இப்பிரிவில நாம் எத்தனிததுள்ளோம்.

47. பலவினமான உதாரணங்கள்

செய்முறை தரப்பட்ட பலவின உதாரணங்கள் சிலவற்றுடன் இவ்வதிகாரத்தை முடிபபோம்.

உதாரணம் 1. ρ அடர்த்தியுள்ள திரவத்தைக் கொண்ட ஒரு சதுர வெட்டுடைய குழாய், அதன் மேலோரத்தோடு பிணைக்கப்பட்டு நிலைக்குத்தோடு 30° சாய்வு உள்ள பொறிக் கதவால் அடைக்கப்படும். குழாயிலுள்ள திரவம் கதவைத் திறக்கா வண்ணம் கதவின் மிகச் சிறிய நிறையைக் காண்க.



படம் 81

சதுரத்தின் பக்கம் a அடி ஆகுக. AB யானது A யிலுள்ள ஓரத்திற பிணைக்கப்படும் பொறிக் கதவைக் குறிக்க. G, H என்பன முறையே கதவின் புவியீர்ப்பு மையமும் கதவின் அமுக்க மையமும் ஆயின்,

$$AG = \tfrac{1}{2} AB$$

$$= \tfrac{1}{2} a \text{ சீக } 30°, \text{ AB கோசை } 30° = a \text{ ஆதலால்.}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$AH = \tfrac{2}{3} AB$$

$$= \frac{4a}{3\sqrt{3}}.$$

P யானது (கதவுக்குச் செங்கோணங்களிலே தாக்கும்) திரவத்தின் மொத்த உதைப்பாயின், கதவு திறவாதவாறு இருக்க அதன் மிகச் சிறிய நிறை (W), A பற்றி W வின் திருப்பமானது A பற்றி P யின் திருப்பத்திற்குச் சமமாகுமிடத்து தரப்படும். அதாவது,

$$W.AG \text{ கோசை } 60^\circ = P.AH,$$

அல்லது
$$W.\frac{a}{\sqrt{3}}.\tfrac{1}{2} = P.\frac{4a}{3\sqrt{3}},$$

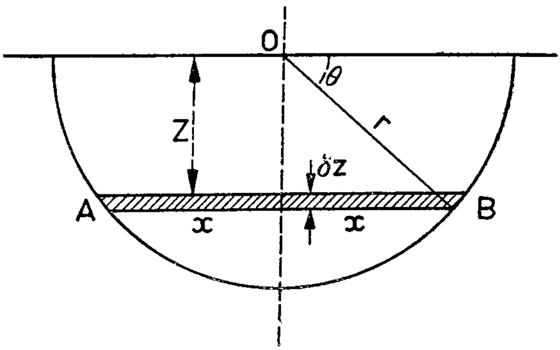
அல்லது
$$W = \frac{8P}{3};$$

P என்னும் மொத்த உதைப்பு, $a \times AB \times \rho \times \frac{1}{2}a$ என்பதற்குச் சமமாகும்,

அதாவது
$$P = \tfrac{1}{2}\rho a^3 \text{ சீக } 30^\circ$$
$$= \frac{\rho a^3}{\sqrt{3}}.$$

ஆகவே
$$W = \frac{8\rho a^3}{3\sqrt{3}} \text{ இரு நிறை.}$$

உதாரணம் 2. வரைப்புறும் விட்டம் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் அரை வட்டத்தினது அமுக்க மையத்தின் நிலையைக் காணல்.



படம் 82

AB (படம் 82) ஆனது z ஆழத்தில் δz தடிப்புள்ள அரைவட்ட மூலகத்தைக் குறிக்க. அதன் நீளம் $2x$ ஆகும. அதாவது x ஆனது அமுக்க மையம் கிடக்கவேண்டிய சமச்சீர் அச்சிலிருந்து அளக்கப்படும். அரைவட்டத்தின ஆரை r ஆகுக. எனின ρ எனபது திரவத்தின் அடர்த்தியாயின்

$$\text{மூலகக் கீலத்தின் பரப்பளவு} = 2x\,\delta z,$$

$$\text{கீலத்தில் உதைப்பு} = 2x\,\delta z.\rho z,$$

பரப்புப்பற்றிக் கீலத்திலுள்ள உதைப்பின்

$$\text{திருப்பம்} = 2x\,\delta z.\rho z.z\,;$$

$$\therefore \quad \text{பரப்புபற்றி மொத்தத் திருப்பம்} = \int_0^r 2\rho x z^2 dz,$$

$$\text{அதாவது மொத்தத் திருப்பம்} = 2\rho\int_0^r xz^2 dz$$

$$= 2\rho\int_0^r z^2\sqrt{(r^2 - z^2)}dz,$$

$x^2 + z^2 = r^2$ ஆதலால்.

இக் கோவையைத் தொகையிடுதற்கு நாம் ஒரு திரிகோணகணித உரு மாறறஞ் செய்யவேண்டும்.

$z = r$ சைன் θ எனப் பிரதியிடுக ;

ஆயின் $dz = r$ கோசை $\theta\, d\theta$,

$r^2 - z^2 = r^2 - r^2$ சைன்$^2\,\theta$

$= r^2$ கோசை$^2\,\theta$.

மாறியை z இலிருந்து θ விற்கு மாற்றுமிடத்து நாம் எல்லைகளையும் மாற்றவேண்டும்.

மேல் எல்லையில் $z = r$ ஆகுமிடத்து,

$r = r$ சைன் θ,

ஆதலால், சைன் $\theta = 1$

அதாவது $\theta = \dfrac{\pi}{2}$;

கீழ் எல்லையில் $z = 0$ ஆகுமிடத்து, r சைன் $\theta = 0$ ஆகி

$\theta = 0$ ஆகும்.

ஆயின், மொத்தத் திருப்பத்திற்குரிய தொகையீடு :

$$= 2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \text{சைன்}^2\theta.\ r\ \text{கோசை}\ \theta.\ r\ \text{சோசை}\ \theta\ d\theta$$

$$= 2\rho r^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{சைன்}^2\theta\ \text{கோசை}^2\theta\ d\theta.$$

ஆனல்

$$\text{சைன்}^2\theta\ \text{கோசை}^2\theta = \tfrac{1}{4}\ \text{சைன்}^2\ 2\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\ (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\ \text{கோசை}\ 4\theta).$$

$$\text{ஆகவே மொத்தத் திருப்பம்} = 2\rho r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\ \text{கோசை}\ 4\theta)\, d\theta$$

$$= 2\rho r^4 \left[\tfrac{1}{8}\,\theta - \tfrac{1}{8}\frac{\text{சைன்}\ 4\theta}{40} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\rho r^4 . \tfrac{1}{8} . \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi \rho r^4}{8}.$$

மொத்தத் திருப்பமானது, மொதத உதைப்பு அமுக்க மையத்தின் ஆழம் என்பனவற்றின் பெருக்கத்திறகுச் சமமாகும். இவ்வகையில்

$$\text{மொத்த உதைப்பு} = \frac{\pi r^2}{2} . \rho . \frac{4r}{3\pi}$$

$$= \tfrac{2}{3}\rho r^3. \ (\S\ 27\ \text{ஐப் பார்க்க})$$

ஆயின் Z என்பது அமுக்க மையததின் ஆழமாயின்

$$Z \times \tfrac{2}{3}\rho r^3 = \frac{\pi \rho r^4}{8}$$

$$\therefore \quad Z = \frac{3\pi r}{16}.$$

உதாரணம் 3. ஒரு சேமிப்புச் சுவர் (படம் 83) வரிப்படத்திற் காட்டிய அளவுகளுடன் எண்ணெய் (தன்னீர்ப்பு 1·9) சேமித்தற்காகக் கட்டப்படவேண்டும். வெட்டு ஒரு சரிவகமாகி எண்ணெயோடு தொடுகையிலுள்ள சுவரின் முகம் நிலேக்குத்தாகும். சுவரைத் தாக்கும் விசைகளின் விளையுள் அடியை நடுமூன்றிலொன்ருன பாகத்தில் வெட்டவேண்டுமாயின் கன அடிக்கு கற்கட்டின் மிகச் சிறிய நிறையைக் காண்க.

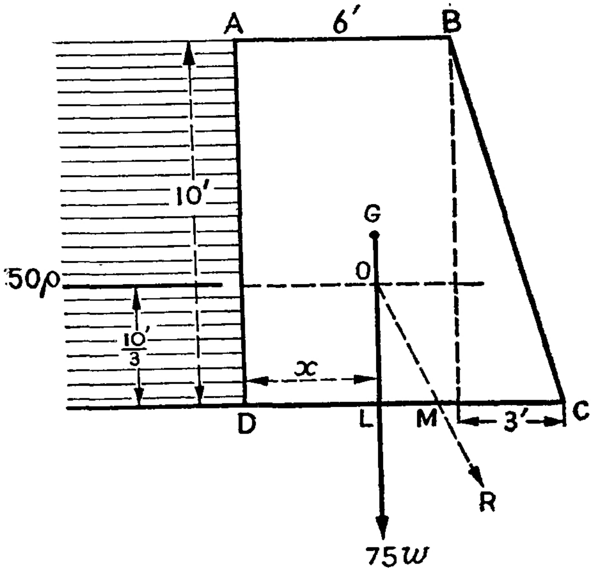
நிலேக்குத்து முகத்திலிருநது சுவரினது புவியீர்பபு மையத்தின் (G) தூரத்தை (x) நாம் முதற காண வேண்டும. கற்கட்டு கன அடிக்கு w இருநிறையாயின், 1 அடி நீளமுளள சுவரின் நிறை $60w + 15w$ அல்லது $75w$ ஆகும். செவ்வகப் பாகம $60w$ நிறையாகி நிலேக்குத்து முகத்திலிருந்து அதன் புவியீர்ப்பு மையததின் தூரம 3 அடி ஆகும. முககோணிப் பாகத்தின் நிறை $15w$ ஆகி அதன புவியீாப்பு மையம் $(6 + \tfrac{1}{3}.3)$ அடி அல்லது 7 அடி தூரத்திலிருககும்.

நிலேக்குத்து முகமபற்றித திருப்பங்கள் எடுக்க

$$60w.\ 3 + 15w.\ 7 = 75wx,$$

அல்லது
$$x = \frac{19}{5}\ \text{அடி}.$$

அணையில் மொத்தத் திரவ உதைப்பு $=10\times5\rho$. இங்கு ρ வானது எண்ணெயின் அடர்த்தியாகும். உதைப்பு, நிறை ஆகியவற்றின் விளையுள்



படம் 83

அடியை வெட்டும் புள்ளி M ஆயின் முன்போல △ OLM விசை முக்கோணி யாகி

$$\frac{75w}{OL}=\frac{50\rho}{LM},$$

$$\therefore\quad LM=\frac{50\rho}{75w}.OL$$

$$=\frac{2\rho}{3w}.\frac{10}{3}$$

$$=\frac{20\rho}{9w}$$

$$\therefore\quad DM=\frac{19}{5}+\frac{20\rho}{9w}.$$

M ஆனது DG யின் நடு மூன்றிலொன்றிற் கிடத்தற்கு DM ஆனது 6 அடியிலும் சிறிதாக வேண்டும்.

$\therefore$ DM$<$6 ஆகுமாறு w இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது $$\frac{20\rho}{9w}+\frac{19}{5}<6,$$

அதாவது $$\frac{20\rho}{9w}<\frac{11}{5},$$

அதாவது $$99w>100\rho,$$

அதாவது $$w>\tfrac{100}{99}\rho,$$

அதாவது $$>\tfrac{100}{99}\times 62\tfrac{1}{2}\times 1{\cdot}9$$ இரு. நிறை /கன அடி.

அதாவது $$w>119{\cdot}9$$ இரு. நிறை/கன அடி.

ஆகவே கற்கட்டின் மிகச் சிறிய நிறை கன அடிக்கு 119·9 இரு. நிறை ஆகவேண்டும்.

பயிற்சி VI

1. ஓர் உச்சி பரப்பிலிருக்க எதிர்ப்பக்கம் h ஆழத்திற் கிடையாகுமாறு ஒரு முக்கோணி ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். இந்த உச்சிக்கூடாக முக்கோணியின் தளத்தில் வரையப்படும் கிடைக் கோடுபற்றி முக்கோணியின் சுழிப்பு ஆரை $h/\sqrt{2}$ ஆயின் அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

2. A யானது p ஆழத்திலிருக்க BC யானது $p+h$ ஆழத்திற் கிடையாகுமாறு ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் ABC என்னும் முக்கோணியின் அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க. புவியீர்ப்பு மையத்திற்கூடாக BC யிற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படும் கோடுபற்றி முக்கோணியின் சுழிப்பு ஆரை $h/\sqrt{18}$ எனத் தரப்படும்.

3. ஈற்றுக் கேள்வியில், BC யானது p ஆழத்திலும் A யானது $p+h$ ஆழத்திலும் இருக்குமாயின் அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

4. ABC என்னும் முக்கோணிப் பரப்பளவின் AB என்னும் அடி நீர்ப்பரப்பிலிருக்க C என்னும் உச்சி AB யிற்கு நிலைக்குத்தாயக் கீழே இருக்கும். h ஆனது C யிலிருந்து AB யிற்குச் செங்குத்து நீளமாயின், AB யானது nh என்னும் ஆழத்திலிருக்குமாறு முக்கோணி ஆழத்தப்படுமிடத்து முக்கோணிப் பரப்பளவில் அமுக்க மையத்தின் இடப்பெயர்ச்சி $nh/2(3n+1)$ ஆகும் என்பதைக் கேள்வி 3 இன் முடிபை வழங்கி நிறுவுக.

5. 3 அடி அகலமும் 4 அடி ஆழமும் கொண்ட செவ்வகக் குறுக்கு வெட்டுள்ள ஒரு தாழியின் முனை ஒன்று அதன் கீழோரத்தின் வழியே பிணைக்கப்பட்டு அதன் மேல் ஓரத்தின் நடுப்புள்ளியிற் பிரயோகிக்கப்படும் P என்னும் கிடை விசையால் நிலையிற் பிடிக்கப்படும். தாழி நீரால் மட்டாய் நிரப்பப்படுமாயின் நீர் வெளியே பாய்தலைத் தடுத்தற்கு வேண்டிய P யின் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க. (நீரின் அடர்த்தி 62.5 இரு. கன அடிக்கு). *(H.S.C.,I.)*

6. ஒரு திரவத்தில நிலைக்குத்தாக முழுவதும் உள்ளாழத்தப்படும் ஒரு முக்கோணியின் அமுக்க மையமானது, அம் முக்கோணியினது பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளில் வைக்கப்பட்டு அபபுள்ளிகளின ஆழஙகளுக்கு விகிதசமமாகும் மூன்று நிறைகளின் புவியீர்ப்பு மையமாகுமென §38 உதாரணம 3 இன் முடியைப் பிரயோகித்து நிறுவுக.

7. ஒரு கப்பலில நீர் செல்லாத கூடம ஒனறின் கதவு 6 அடி உயரமும் 2 அடி 6 அஙகுல அகலமுமாகி ஒரு நிலைகுத்தான ஓரத்தின் வழியே பிணைக்கப்படும். கதவின உச்சி வெளியேயுள்ள கடற் பரபபின கீழ் 7 அடி ஆகும் ; (i) கதவிலுள்ள மொத்த உதைப்பு (ii) பிணைசசலில மறுதாக்கம் ஆகியவறறைக் காண்க.

8. ஒரு பூட்டுப்படலை நிலைகுத்தாய மேன்முகமாக வழுககிக்கொண்டு வேலைசெய்யும. மேற கிடை ஓரம் கீழ்க் கிடை ஓரஙகளில் அது தாஙகப்படும். பூட்டுப் படலையின் உயரம் a யாகவும் ஆழம கூடுதலான பககததில நீரின் ஆழம h ஆகவும் ஆழம் குறைநத பககத்தில நீரின ஆழம் h ஆகவும் படலையின் அகலம் l லாகவும் அலகுக் கன அளவு நீரின் நிறை w வாகவும இருககுமாயின்

$$\text{உச்சித தாஙகியில மறுதாககம்} = wl\,(h^3 - h'^3)/6a,$$

$$\text{அடித தாஙகியில மறுதாககம} = \frac{\frac{1}{2}wl\,(h^2 - h'^2) - wl\,(h^3 - h'^3)}{6a}$$

எனக காட்டுக.

9. புவியீரபபு மையம a ஆழததிலும அமுக்க மையம b ஆழததிலும் இருக்குமாறு ஒரு தளப்பரப்பு ஒரு திரவததில உள்ளாழத்தபபடும. h தடிப்புள்ள கூடுதலான திரவப படை இதனில் மீபொருத்தபபடுமாயின் அமுகக மையத்தின் நிலை பரப்புககுத தொடர்பாக $h\,(b-a)/(a+h)$ என்னும் நிலைக்குததுத தூரம் எழுமெனக் காட்டுக.

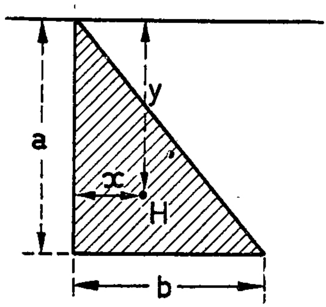
10. ஒரு செவ்வகம எபபொழுதும கிடையோடு θ சாய்வு கொள்ளுமாறும் அதன ஒரே சோடி ஓரங்கள எனறும கிடையாகுமாறும அச்செவவகம் வேறு வேறான ஆழங்களில் உள்ளாழ்த்தப்படுமாயின ஆழம அதிகரிகக அமுக்க மையமும் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒனறோடொன்று பொருநதற்கு நாடும எனக காட்டுக.

11. 3 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு வட்ட அடர் அதன மையம் 4 அங்குல ஆழத்திலிருக குமாறு கன அங்குலததிறகு ρ இறு. அடர்ததியுள்ள திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும. அமுகக மையத்தின ஆழத்தை வரைபு முறையிற் கண்டு இம்முடிபை §42 உதாரணம் 2 இற் பெறபபட்டதோடு ஒப்பிடுக.

12. தன் அடி பரப்பிலும எதிர் உச்சி p ஆழததிலும் இருக்குமாறு ஒரு முக்கோணி நிலைக்குத்தாய் நீரில உள்ளாழததபபடும். நீருககுரிய பயனபடு பரப்பின் உயரம் h ஆயின் அமுக்க மையமானது வளிமண்டல அமுககம் புறக்கணிக்கப்படுமிடததுப பெறப்படும் அமுக்க மையத்திலும் $hp/(6h+2p)$ என்னும் கூடுதலான உயரம் ஆகுமென நிறுவுக.

13. ஓர் இணைகரம் தன் மையம பரப்பின கீழ h ஆழத்திலிருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குததாக முறறாய் உள்ளாழ்ததபபடும். ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டில் அதன பக்கங்களின் எறியஙகள் a, b என்னும நீளங்கள் உடையனவாயின் அமுக்க மையத்தின் ஆழம் புவியீரப்பு மையத்தின் ஆழத்திலும் $(a^2+b^2)/12h$ என்பதாற் கூடுமெனக் காட்டுக.

14. வரிப்படத்திற் காட்டப்படுதல்போல ஒரு செங்கோண முக்கோணி ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும்.



அமுக்க மையத்தின் (H) நிலையை (i) பரிசீலனையால் (ii) தொகையிடலால் x, y என்னுந் தூரங்களைத் துணிதலாற் காண்க.

15. r ஆரையுள்ள வட்டத்தின் காற்பகுதி வடிவங்கொண்ட ஓர் அடர் ஒரு நேர் ஓரம் பரப்பிலிருக்குமாறு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். இரு நேர் ஓரங்களில் இருந்து அமுக்க மையத்தின் தூரங்களைக் காண்க.

16. ஒரு பூட்டு α என்னுங் கோணத்திற் சந்திக்கும் இரு சமபடலைகளால் அடைக்கப் படுமாயின் ஒரு படலையில் மற்றையதாலாய உதைப்பு ஒவ்வொரு பிணைகோலினுள்ள உதைப்புகளுக்குச் சமமெனவும்; பூட்டை அதன் நீளத்திற்குச் செங்கோணங்களில் ஒற்றைப் படலையால் அடைக்குமிடத்து அப்படலையில் உஞற்றப்படும் நீர்நிலையியல் உதைப்பின் $\frac{1}{2}$ கோசீ α மடங்கெனவும் நிறுவுக.

17. ஒரு கால்வாய்ப் பூட்டின் படலைகள் ஒவ்வொன்றும் $12\frac{1}{2}$ அடி அகலமுள்ளன. கால்வாயின் அகலம் 24 அடி ; ஒரு பக்கத்தில் நீரின் ஆழம் 18 அடியும் மற்றைப் பக்கத்தில் 12 அடியுமாகும். ஒவ்வொரு படலையினும் விளையுள் நீர் அமுக்கத்தின் பருமனைக் கண்டு அது அடியிலிருந்து 7·6 அடியிற் தாக்குமெனக் காட்டுக. படலைகளுக்கு இடையே உதைப்பு 56 டீதான் நிறை எனக் காட்டுக.

18. a என்னும் பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம் அதன் ஓர் உச்சி பரப்பிலும் ஒரு பக்கம் நிலைக்குத்தோடு θ கோணச் சாய்விலும் இருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். புவியீர்ப்பு மையத்தினதும் அமுக்க மையத்தினதும் ஆழவித்தியாசம் $a/6$ (சைன θ + கோசை θ) எனக் காட்டுக.

19. செவ்வக வெட்டுள்ள ஒரு கற்கட்டுச் சேமிப்புச் சுவர் அதன் உச்சிக்கு எழக்கூடிய நீரைச் சேமித்தற்கு 12 அடி உயரத்திற்குக் கட்டப்படவேண்டும். கற்கட்டு கன அடிக்கு 150 இரு. நிறையாகிச் சுவர் அடியில் உயர்வுக் குணகம் 0·4 ஆயின் சுவர் தன்னடியில் வழுக்காது இருத்தற்கு வேண்டிய அதன் இழிவு அகலத்தைக் காண்க. இவ்வகலம் மேற்றிரும்பல் நிகழாதவாறு சுவருக்குக் காப்பு ஆகுமென நிறுவுக.

20. ஈற்றுக் கேள்வியில் வழுக்கல் நிகழாதவாறு காப்பாகச் சுவர் 8 அடி அகலமுள்ளதாக அமைக்கப்படுமாயின் ; சுவரின் நிறை நீரின் நீர்நிலையியலுதைப்பு என்பவனவற்றின் விளையுள், அடியை எங்கு வெட்டுமெனக் காண்க. சுவரில் யாதும் **இழுவைத் தகைப்பு** ஆக்கப்படுமா?

21. ஒரு வடிகாலவாயின் வெளி வழியானது அச்சுக் கிடையாகவும் குறுக்கு வெட்டு $2a$ என்னும பககமுடைய சமபக்க முக்கோணியாகவும் உள்ள V வடிவுகொண்ட தாழியால் ஆக்கப்படும். இதற்கு தனது நிறையாலேயே மூடப்படும் ஓர் இறுகப் பொருந்தக்கூடிய முககோணிப் பொறிக் கதவால் அடைக்கபபட்ட ஒரு சரிவுத் தளமுனை உண்டு. இக்கதவு $2a$ என்னும் நீளமும் கிடையானதுமான தன் மேலோரத்திற் பிணைககபபடும். கதவின் எஞ்சிய பக்கங்கள் ஒவ்வொனறும் $4a$ என்னும் நீளமாகும். தாழியிலுள்ள திரவத்தின் ஆழம் a ஆகுமிடத்து கதவு திறக்குமாயின் கதவின் நிறை

$$\tfrac{5}{12}\,wa^3\,(2\sqrt{3}-1)$$

எனக காட்டுக ; இஙகு w ஆனது திரவத்தின் அலகுக் கனவளவின் நிறையாகும் [*H.S.C.,III.*]

22. ஒரு பாண்டம a யிலும் பாாக்கக் கூடிய ஆழத்திற்கு ρ அடர்த்தியுள்ள ஏகவினப் பாயிப் படையையும், அதனமேல் $d\ (>a)$ என்னும் ஆழத்திற்கு ρ அடர்த்தியுள்ள ஏகவினப் பாயிப் படையையுங் கொள்ளும். a ஆரையுள்ள ஒரு தள வட்டத் தட்டு தனது தளம் நிலைகுத்தாகி தனது மையம் இரு பாயிகளின் பொதுப்பரப்பில் இருககுமாறு பாண்டத்தில் வைக்கப்படும. வளிமணடல அமுக்கத்தைப் புறக்கணித்துககொணடு அதன் மையத்தின் கீழ அமுகக மையத்தின் ஆழம்

$$\frac{3\pi\,(\rho_1+\rho_2)\,a^2}{8\left[3\pi\rho_2 d+2\ (\rho_1-\rho_2)\,a\right]}$$

எனக காட்டுக. (*H.S.C,III.*)

விடை

1. $\dfrac{3h}{4}$. 2. $\dfrac{6p^2+ph+3h^2}{2\,(3p+2h)}$. 3. $\dfrac{6p^2+4ph+h^2}{2\,(3p+h)}$.

5. 500 இரு. நிறை. 7. (i) 9375 இரு. நிறை ; (ii) $4687\frac{1}{2}$ இரு. நிறை.

11. $4\frac{9}{16}$ அங். 14. $x=\dfrac{3b}{8},\ y=\dfrac{3a}{4}$.

15. கிடையோரததின கீழ்த் தூரம $=3\pi r/16$; நிலைக்குத்து ஓரத்திலிருந்து தூரம் $=3r/8$.

17. 30·22 தொன் நிறை. 19. 6·25 அடி.

20. சுவரின் மையததிலிருநது 1·25 அடி, நீர்முகபதிற்கு அப்பால். இல்லை ; ஏனெனின் விளையுள சுவரின் நடு மூன்றிலொனறுக்குட் கிடக்கும்.

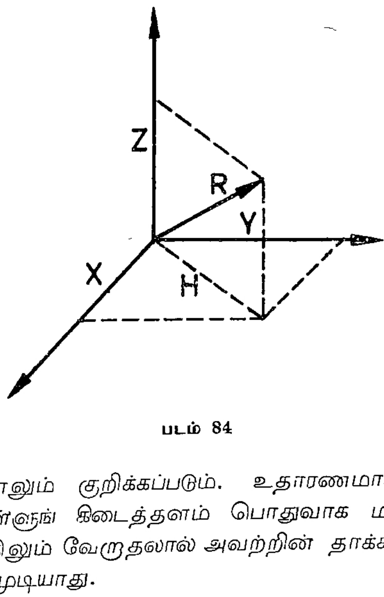
அதிகாரம் VII

பாரமான பாயிகளின் அமுக்கம் (5)

யாதும் ஒரு பரப்பில் விளையுள் உதைப்பு

48. பிரச்சினையின் இயல்பான தன்மை

ஈற்று மூன்று அதிகாரங்களிலும் ஒரு தளப் பரப்பளவின் மீது ஒரு பாயியால் உஞற்றப்படும் உதைப்பைப் பற்றி அவாவியுள்ளோம். இப்போது யாதும் ஒரு வளை பரப்பில் விளையுள் உதைப்பைக் காண்பதற்கு எமது முறைகளை விரிக்க விரும்புகிறேம். இது கூடிய கடினமாகும் ; எனெனின் ஒரு தளப் பரப்பளவின் வகையிற் பல்வேறு புள்ளிகளில் உள்ள உதைப்புக்கள் எல்லாம் பரப்பளவுக்குச் செங்கோணங்களிலுள்ளன வாகையால், அவை ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமாவதோடு ஒன்றி விளையுள் ஆகுமாறு கூட்டப்படலாம். ஆனுல் ஒரு வளை பரப்பின் வகையில் உதைப்புக்கள் யாவும் வளைபரப்புக்குச் செவ்வனுகி (§4) வேறுவேறு தளங்களிலிருத்தலால் ஒனறி விளையுளைத் தருமாறு அவற்றைக் கூட்ட முடியாது. எனினும் பரப்பின ஒவ்வொரு மூலகத்திலுந் தாக்கும் அமுக்கத்தை நாம செங்கோணத்திலுள்ள மூனறு கூறுகளாகத் துணித்து ஒவ்வொரு திசையிலும் விளையுள் கூறைக் காணலாம்.



படம் 84

பொதுவாக இதுவே நாம் செய்ய முடியும் ; வளைபரப்பில் விளையுள் உதைப்பு அவற்றின் முறைமையான தளங்களிலுள்ள மூன்று கூறுகளாலும் குறிக்கப்படும். உதாரணமாக, கிடைக் கூறுகளுள் ஒன்றைக் கொள்ளுங் கிடைத்தளம் பொதுவாக மற்றையதைக் கொள்ளுங் கிடைத்தளத்திலும் வேருதலால் அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டமுடியாது.

எனினும் (உடல் சமச்சீராகுமிடத்துப் பல முறையும் உண்மையாதல் போல்) இம் மூனறு கூறுகளும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமாயின் ஒன்றி விளையுள் உதைப்பைப் பெறுமாறு நாம் அவற்றைப் பின்வருமாறு கூட்டலாம் :

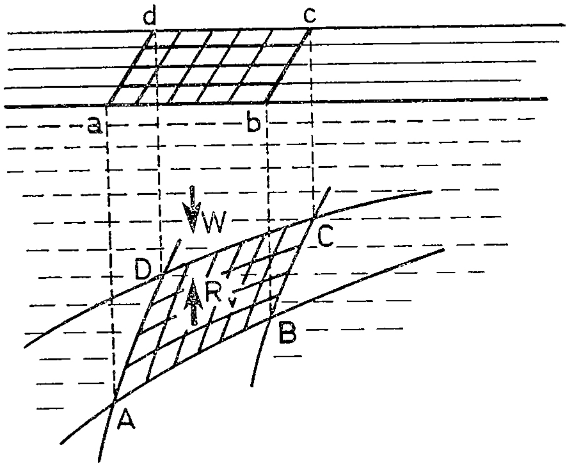
X, Y என்பன கிடையான இரு செங்குத்துத் திசைகளில் துணித்த கூறுகளையும் **Z** என்பது நிலைக்குத்துத் திசையிலுள்ள கூறையும் குறிக்கு

மாயின் (படம் 84) X, Y ஆகியவற்றின் விளைவுகளாகிய H என்பது விசையிணைகரத்தின்படி $\sqrt{(X^2+Y^2)}$ இற்குச் சமமாகும்; இதேபோல் பரப்பில் விளையுள் உதைப்பு (R) ஆனது Z, H என்பவற்றின் விளையுளாகும். ஆகவே அது $R=\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}$ என்பதாலே தரப்படும்.

பின்வரும் பந்திகளிற் கிடைத் திசைகளிலும் நிலைக்குத்துத் திசைகளிலும் விளையுள் கூறுகளை எவ்வாறு காணவேண்டுமெனக் காட்டப்படும்.

49. விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பு.

உள்ளாழ்த்தப்பட்ட ஒரு பரப்பில் (பொதுவாக விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பு எனப்படும்) பாயி உதைப்பின் விளையுள நிலைக்குத்துக் கூறைக் காண்பதற்கு, அப்பரப்பின மேல் நிற்கும் நிலைக்குத்தான பாயி நிரலின் சமநிலையையே நாம் எடுத்து நோக்க வேண்டும்.



படம் 85

ABCD (படம 85) ஆனது, பாயியானது அதனை மேலிருந்து அமுக்குமாறு வளைபரப்பிலுள்ள ஒரு பரபபளவாகுக. A, B, C, D என்பனவற்றிற் கூடாக வரையப்படும் நிலைக்குததுக் கோடுகள் பாயிப் பரப்பை *a*, *b*, *c*, *d* என்பனவற்றிற சந்திக்க.

ABCD*abcd* எனனும் நிரலிலுள்ள பாயியின் சமநிலையை எடுத்து நோக்குக.

இதனைத் தாக்கும் நிலைக்குத்து விசைகளாவன.

(1) இதன் புவியீர்பபு மையத்திற்கு ஊடாகக கீழ்முகமாகத் தாக்கும் இதன் நிறை (W).

(2) பாயியில் வளைபரப்பால் உஞற்றப்படும் மறுதாக்கத்தின் மேல் முகமான கூறு (R_v)

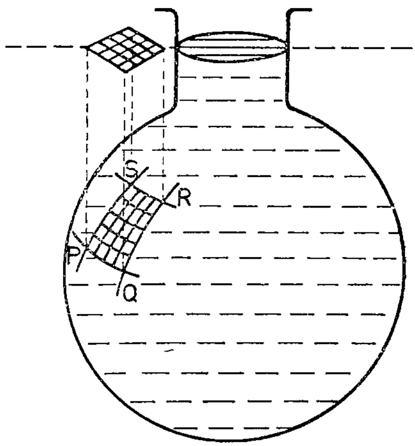
என்பன மட்டுமே.

நிலைக்குததாகத் துணிக்குமிடத்து இவை சமமும் எதிருமாக வேண்டியதால்

$$R_v = W.$$

ஆனால் பாயியில் வளைபரப்பின் மறுதாக்கம் பரப்பின்மீது பாயியின் உதைப்புககுச் சமமும் எதிருமாகும். ஆகவே **வளைபரப்பில் பாயியின் விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பானது இப்பாயி நிரலின் நிறைக்குச் சமமாகி, இப்பாயியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கூடாகக் கீழ்முகமாகத் தாக்கும்.**

படம் 86 இல் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பரப்பளவு வகையில் உள்ளது போல பாயியானது வளைபரப்பில் மேனமுகமாக அமுக்குமாயின் செப்பமாய் இதே செயனமுறை வழங்கப்படும். பாயியால் ஆய அமுக்கச் செறிவு பாயிப் பரப்பின் கீழ் உள்ள ஆழத்தையே சாருமாதலால் இவ்வகைப் பரப்பளவிலுள்ள உதைப்பு, பாயியானது பரப்பின மேலிருந்து அமுககுமிடத்துப் பெறப்படும் உதைப்புக்குச் சமமும் எதிருமாகும். அதாவது, படம் 86 இல் PQRS எனனும் பரப்பளவில் உள்ள நிலைககுத்து உதைப்புக் கூறுனது இப்பரப்பளவின்மேல் பாயிப் பரப்புவரை நிறகும் பாயிநிரலின் நிறைக்குச் சமமாகும். ஆனால் அது இவ்வாறு உதரே சிக்கப்பட்ட பாயி நிரலின் புவியீர்பபு மையத்திற்கு ஊடாக **மேன்முகமாகத்** தாக்கும்.



படம் 86

ஒரு வளைபரப்பில் உள்ள நிலைக்குததது உதைப்புக கூறுபற்றிய ஓா உதாரணத்தை § 25, உதாரணம 1 இற் கணடுளளோம். அஙகு தன உயரத்தின் அரைப் பஙகுக்குக் கடல்நீரால் நிரப்பப்பட்ட ஒரு பொட்கூம்பை எடுததுத் திரவததின நிறையையும் அடியிலுள்ள உதைப்பையுந் துணிந்தோம். இவற்றின் வித்தியாசமாகிய 2·618 இரு. நிறையானது வளைபரப்பில் உதைப்பின் நிலைககுத்துக் கூறுல் ஆயது எனக் கொண்டோம்.

இவ்வதிகாரத்திலுள்ள கொள்கைக் கேற்ப இந்நிறையானது உண்மையில் வளைபரப்பின்மேல் நிறகத்தக்க திரவத்தின் நிறை ஆகும் என்

பதை நாம் இப்போது காட்டுவோம். § 25, உதாரணம் 1 இற் தரப்படும் அளவுகளை வழங்க :—

3 அங்குல ஆரையுடைய அடியில் நிற்கும் 6 அங்குல உயரங் கொண்ட உருளையின் கனவளவு

$$=\pi\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\tfrac{1}{2} \text{ கன அடி.}$$

ஆனால் கூம்பினது அடித் துண்டின் கனவளவு

$$=\tfrac{1}{3}\pi\frac{7}{128} \text{ கன அடி.}$$

∴ வளைபரப்பின் மேல் நிற்கத்தக்க திரவத்தின் கனவளவு

$$=\frac{\pi}{32}-\frac{7\pi}{3.128} \text{ கன அடி.}$$

$$=\frac{5\pi}{3.128} \text{ கன அடி.}$$

∴ வளைபரப்பின் மேல் நிறகத்தக்க கடல் நீரின் நிறை

$$=\frac{5\pi}{3.128}\times 64 \text{ இரு. நிறை.}$$

$$=\frac{5\pi}{6} \text{ இரு. நிறை}$$

$$=2{\cdot}618 \text{ இரு. நிறை.}$$

ஆயின் கடல் நீரால் வளைபரபபில் உஞற்றப்படும் உதைப்பின நிலைக்குத்துக கூறு 2·618 இரு. நிறையாகி மேல்முகமாகத் தாக்கும்.

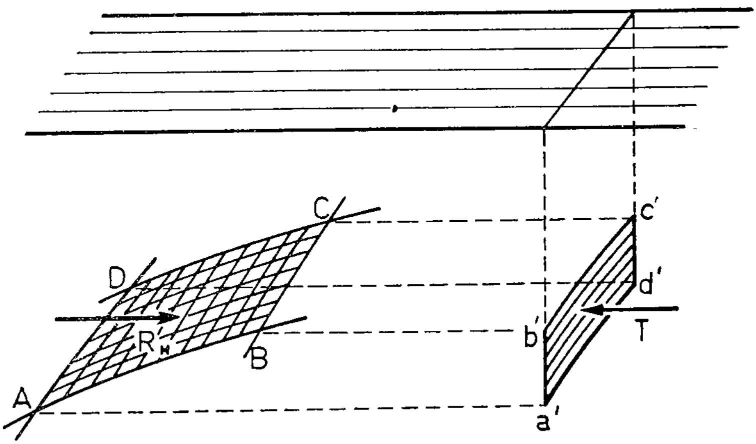
ஒரு வளைபரப்பிலுள்ள உதைப்பின் கிடைக் கூறை எடுத்து நோக்கும் வரை நிலைக்குத்துக் கூறை உட்படுத்தும் வேறு உதாரணங்கள் தீர்க்கப்பட மாட்டா.

50. விளையுள் கிடை உதைப்பு

ஒரு வளைபரப்பிலுள்ள உதைப்பின் கிடைக் கூறுனது (விளையுள் கிடை உதைப்பு) ஒரு முனையில் வளைபரப்பாலும் மற்றையதில் ஒரு தளப் பரப்பாலும் வரைப்புற்ற கிடையான பாயி நிரலின் சமநிலையை எடுத்து நோக்குதலாற் துணியப்படலாம்.

படம் 87 ஐ எடுக்க. அது (§ 49 இலுள்ளதுபோல்) ஒரு வளைபரப்பில் ABCD என்னும் பரப்பளவைக் காட்டும்; ஆனால் இப்போது அது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் எறியப்பட்டு, $a'b'c'd'$ என்பது அதன் எறியமாகும். ABCD என்பது பாயியில் முற்றாய் உள்ளாழ்த்தப்படும் ஓர் அடர் எனக்

கொள்ளப்படுமாயின் நாம் ABCD$a'b'c'd'$ என்னும் பாயி நிரலின் சமநிலையை எடுத்து நோக்கலாம். எறி தளத்திற்குச் செங்குத்தாக (அதாவது, நிரலினது அச்சின் வழியே) தாக்கும் விசைகளாவன



படம் 87

(1) $a'b'c'd'$ என்னுந் தளப் பரப்பளவின் அமுகக மையத்தில் தாக்கு வதும் இத்தளமுகத்திற்குக் குறுக்காக எஞ்சிய பாயியால் உஞற்றப் படுவதுமான உதைப்பு (T)

(2) ABCD என்னும் வளைந்த அடரால் உஞற்றப்படும் மறுதாக்கக் கிடைக் கூறு (R_H)

என்பன மட்டுமே.

ஆகவே இவை சமமும் எதிருமாகும்; பாயியால் அடரில் உஞற்றப்படும் உதைப்பானது அடராற் பாயியில் உஞற்றப்படும் மறுதாக்கத்திற்குச் சமமும் எதிருமாதலால் :—

ஒரு தந்த கிடையான திசையில் பரப்பளவினமீது பாயியாலாய விளையுள் கிடை உதைபபு தந்த திசைக்குச் செஙகுத்தான நிலைக்குத்துத் தளத்திற் பெறப்படும் பரப்பளவின் எறியத்தில் உஞற்றப்படும் உதைப்புக்குச் சமமாகி இந்த எறியப் பரப்பளவின் அமுக்க மையத்திற்கூடாகத் தாக்கும்.

உதாரணம். r ஆரையுள்ள ஒரு பொள் அரைக் கோள ஓடு ஒரு விட்டம் நிலைக்குத்தா குமாறு ρ அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படும். மையம் k ஆழத்தில் இருக்கு மாயின் அரைக் கோளத்தில் விளையுள் கிடை உதைப்பைக் காண்க.

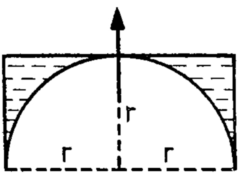
அரைக் கோள ஓட்டின் எறியமானது r ஆரையும் k ஆழத்தில் மையமும் உடைய ஒரு வட்டமாகும். ஆகவே மேலுள்ள தேற்றத்தி

லிருந்து அரைக் கோள ஓட்டினது வளைபரப்பின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் விளையுள் கிடை உதைப்பு இவ்வட்டத்திலுள்ள உதைப்புக்குச் சமமாகும். § 27 (வகை 7) இலிருந்து இது $\pi r^2 \rho k$ ஆகி § 42 (உதாரணம் 2) இலிருந்து வட்டத்தின் அமுக்க மைய ஆழம் $k+\frac{r^2}{4k}$ ஆகும். ஆயின விளையுள் கிடை உதைப்பின் பருமனும் நிலையும் எமகுத் தெரியும்.

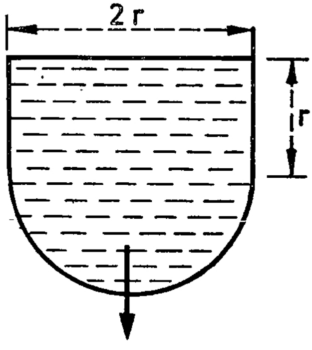
51. உதாரணங்கள்

வளைபரப்பில் தாக்கும விளையுள நிலைக்குத்து உதைப்பையும் விளையுள் கிடை உதைபபையும் கூட்டி ஒன்றி விளையுள் பெறுமாறு உள்ள சில பிரச்சினைகளை இப்போது நாம தீர்ப்போம்.

உதாரணம் 1. r அடி ஆரையும் l அடி நீளமும் உள்ள ஓர் அடைத்த உருளை, கன அடிக்கு ρ இரு. அடர்த்தியுள்ள திரவத்தால் நிரப்பப்படும். அதன் அச்சு கிடையாகுமாறு உருளை பிடிக்கப்படுமாயின் அச்சுக்கூடாக வரையப்படுங் கிடைத் தளத்தாலே துணியப்படும் வளைபரப்பின் அரைப் பாகங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் திரவத்தின் உதைப்பைக் காண்க.



படம் 88



படம் 89

உருளையினுடைய வளைபரப்பின் மேல் அரைப் பாகத்தின் மீது விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பானது திரவம் அகத்திலிருத்தற்குப் பதிலாகப் புறத்தி லிருககுமிடதது இபபாகத்தின் மேல் நிற்கும் திரவத்தின் நிறையாகும்; இரு வகைகளிலும் மட்டங்கள் ஒன்றேயாகும். படம் 88 வெட்டைக் குறிக்கும்.

ஆயின் மேல் அரைப் பங்கின்மேல் நிற்கும் திரவத்தின் கன அளவு

$$=2r^2l-\tfrac{1}{2}\pi r^2 l \text{ கன அடி}$$

$$=lr^2(2-\tfrac{1}{2}\pi) \text{ கன அடி}$$

$\therefore$ திரவத்தின் நிறை $= lr^2\rho\,(2-\tfrac{1}{2}\pi)$ இரு. நிறை.

ஆகவே மேற் பாகத்தில் விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பு $lr^2\rho\,(2-\frac{1}{2}\pi)$ ஆகி படம் 88 இற் காட்டியவாறு (அது திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்திற் கூடாகத் தாக்குதலால்) மேன்முகமாகத் தாக்கும். இம் மேல் அரைப பாகம் அச்சுக்கூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்தாற் பிரிக்கப்படு மாயின் ஓர் அரைப பங்கிலுள்ள கிடையான உதைப்பு மற்ற அரைப் பங்கிலுள்ள கிடையான உதைப்புக்குச் சமமும் எதிருமாகுமெனபது தெளி வாகும். ஆகவே விளையுள் கிடை உதைப்பு யாதுமில்லை. ஆகவே மேல் அரைப் பாகத்திற் பெறபபட்ட விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பு உண்மையில மொத்தத் திரவ உதைப்பாகும்.

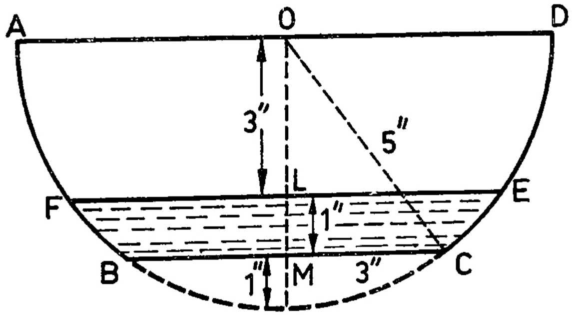
கீழ் அரைப் பாகத்தின மீது விளையுள் நிலைகுததது உதைப்பானது இப்பாகத்தின் மேல் நிற்கும் திரவத்தின நிறையைக் காணும் அதே வழியாற் பெறப்படும். வெட்டு படம் 89 இல் உள்ளதுபோல ஆகும. ஆகவே இந்நிறை

$$=\rho\,(2r^2l+\tfrac{1}{2}\pi r^2 l)$$

$$=lr^2\rho\,(2+\tfrac{1}{2}\pi) \text{ இரு. நிறை.}$$

முன்னதான வகையிலுள்ளதுபோல் யாதும் கிடையான உதைப்பு இல்லை. எனவே இது கீழ் அரைப பாகத்தில் மொத்தத் திரவ உதைப்பைக் குறிக்கும்.

கீழ் அரைப் பாகததிலும் மேல அரைப பாகத்திலும உள்ள உதைப்புக் களின் வித்தியாசம் திரவ உருளையின நிறையைத் தரும என்பதைக கவனிக்க.



படம் 90

உதாரணம் 2. 5 அங். ஆரையுள்ள அரைக் கோளத்தின் தளமுகத்திற்கும் 3 அங். ஆரையுள்ள சமாந்தர வெட்டுக்கும் இடையே உள்ள இவ்வரைக் கோளப் பாகத்தின் வடி வத்தில் ஒரு கிண்ணமுண்டு ; 3 அங். ஆரையுடைய வெட்டு அதன் அடியாகும். அது ஒரு கிடையான மேசையில் வைக்கப்பட்டு 1 அங். ஆழத்திற்கு நீர் கொள்ளுமாயின், வளிபரப்பில் விளையுள் திரவ உதைப்பைக் காண்க ; 1 கன அடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையெனக் கொள்க.

[a ஆரையுள்ள கோளத்தில் வெட்டப்படும் h உயரமுள்ள துண்டத்தின் கனவளவு $\pi h^2(a-\frac{1}{3}h)$ ஆகும்.] (*Inter. Sc.*)

ABCD (படம் 90) கிண்ணத்தையும், EF நீர்ப் பரப்பையும் ; O, L, M என்பன முறையே AD, FE, BC என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகளையுங் குறிக்க. OC = 5 அங்., MC = 3 அங. ஆதலால் பைதகரசின் தேற்றத் தால் OM = 4 அங.

ஆகவே அரைக்கோளத்தைப் பூர்த்தியாக்குவதற்கு அடியோடு பொருத்த வேண்டிய துண்டத்தின் உயரம் ·1 அங். ஆகும். அதன் கனவளவு தந்த சூத்திரத்திலிருந்து $\pi(5-\frac{1}{3})$ கன அங். அல்லது $\frac{14\pi}{3}$ கன அங. ஆகும். இத்துண்டமும் நீரும் சேர்ந்து 2 அங். உயரமுள்ள வேறொரு துண்டமாக்கும் ; அதாவது $4\pi(5-\frac{2}{3})$ கன அங். அல்லது $\frac{52\pi}{3}$ கன அங். கனவளவு உள்ள துண்டம்.

$$\therefore \quad \text{நீரின் கனவளவு} = \frac{52\pi}{3} - \frac{14\pi}{3} \text{ கன அங.}$$

$$= \frac{38\pi}{3} \text{ கன அங்.}$$

வளைபரப்பின் மேல் நிற்கும் நீரின் கனவளவு

= மொத்த நீரின கனவளவு − BC என்னும் அடியின்மேல் நிற்கும் உருளையின் கனவளவு

$$= \frac{38\pi}{3} - \pi 3^2.1 \text{ கன அங்.}$$

$$= \frac{11\pi}{3} \text{ கன அங்.}$$

∴ வளைபரப்பின்மேல் நிற்கும் நீரின் நிறை

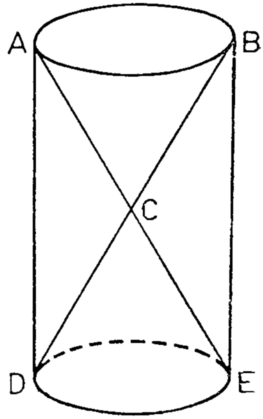
$$= \frac{11\pi}{3} \times \frac{62\frac{1}{2}}{1728} \text{ இரு. நிறை.}$$

$$= 0{\cdot}417 \text{ இரு. நிறை.}$$

சமச்சீரால் விளையுள் கிடைக்கூறு இல்லையாதலால் வளைபரப்பில் இதுவே விளையுள் திரவ உதைப்பாகும்.

உதாரணம் 3. உச்சியிலே தொடர்பு கொண்ட ஒரு சமச்சீரான இரட்டைக் கூம்பு வடிவு கொண்ட ஒரு புனல் ஒரு கிடைத் தளத்தில் நீர் உட்செல்லாதவாறு பொருத்தப்பட்டுத் திரவத்தால் நிரப்பப்படும். புனலின் நிறை நிரவ நிறையின் இருமடங்காலன்றித் திரவம் தப்புமென நிறுவுக.

ABC யானது மேற் கூம்பும் DEC யானது கீழ்க் கூம்பும் ஆகுக (படம் 91). அடிகளில் ஒத்த புள்ளிகளைத் தொடுக்க. தொடுக்குங் கோடுகள் ஓர் உருளையின பரப்பிற் கிடக்கும்.



படம் 91

CDE என்னும் வளைப்பரப்பில மேன்முகமான நிலைக்குத்து உதைப்பு = இப்பரபபுக்கு நிலைக் குததாய் மேலே உண்மையான திரவப் பரப்பு வரை உள்ள வெளியை நிரப்புந் திரவததின் நிறை (§ 49)

= திரவ உருளையின் நிறை – கீழ்த திரவக கூம்பின நிறை.

ABC என்னும் வளைபரபபில கீழ்முகமான நிலைக்குத்து உதைப்பு = மேற் கூம்பை நிரப் புந் திரவத்தின் நிறை.

∴ வளைபரப்பில் விளையுள் மேன்முக நிலைக் குத்து உதைப்பு

= திரவ உருளையின் நிறை – திரவக் கூம்பின் இருமடங்கு நிறை.

இனி, திரவ உருளையின் நிறை = உருளையின் கனவளவு $\times w$

$$= \pi r^2 . 2h \times w = 2\pi r^2 hw,$$

திரவக் கூம்பின் நிறை $= \frac{1}{3}\pi r^2 hw$;

இங்கு r ஆனது கூம்பு அடியின் ஆரையும் h ஆனது கூம்பின் உயரமு மாகும்.

∴ விளையுள மேன்முக நிலைக்குத்து உதைபபு $= 2\pi r^2 hw - \frac{2}{3}\pi r^2 hw$

$= \frac{4}{3}\pi r^2 hw$

$= \frac{1}{3}\pi r^2 hw$ வின் நான்மடங்கு

= திரவக் கூம்பினது நிறையின் நான்மடங்கு

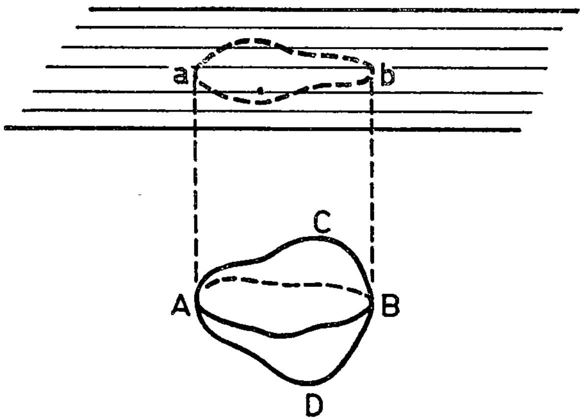
= இரு கூம்புகளிலுமுள்ள திரவ நிறையின் இருமடங்கு.

ஆகவே திரவ நிறையின் இரு மடங்கு நிறை புனலில் ஏற்றப்பட்டாலன்றித் திரவம் தப்பும்.

52. ஓர் உள்ளாழ்த்தப்பட்ட உடலில் விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பு

§ 49 இல் ஒரு பாயியில் உள்ளாழ்த்தப்பட்ட பரப்பில் விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பை எடுத்து நோக்கினேம். அப்பிரிவில் எடுத்து நோக்கப்பட்ட முறைகளை நீர்நிலையியலில் மிக முக்கியமான தேற்றங்களுள் ஒன்றை

நிறுவுதற்கு நாம் விரிக்கலாம். இத்தேற்றம் ஒரு பாயியில் உள்ளாழ்த்தப்பட்ட உடலில் விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பானது இடம்பெயர்க்கப்பட்ட பாயியின் நிறைக்குச் சமமாகும் எனக் கூறும்.



படம் 92

ABCD (படம் 92) ஒரு பாயியில் உள்ளாழ்த்தப்படும் யாதும் ஓர் உடலைக் குறிக்க, ab பாயிப் பரப்பில் இவ்வுடலின் எறியமாகுக. ஆயின் உடலின்மேல் நிற்கும் ஒரு நிலைக்குத்துப் பாயி நிரலைப் பெறுவோம். ஆயின் § 49 இலிருந்து உடலின் மேற் பாகத்தில் விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பு உடலின் மேல் நிற்கும் பாயி நிரலின் நிறைக்குச் சமமாகி இந்நிரலின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கூடாகக் கீழ்முகமாகத் தாக்கும். அன்றியும் உடலின் கீழ்ப் பாகத்திலுள்ள விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பு உடற் பரப்பின் கீழ்ப் பாகத்தின் மேல் நிற்கும் பாயி நிரலின் நிறைக்குச் சமமாகி இந்நிரலின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கூடாக மேன்முகமாகத் தாக்கும். அதாவது,

கீழ்ப் பாகத்தில் விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பு

= உடலின்மேல் நிற்கும் பாயியின் நிறை + உடலால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட பாயியின் நிறை.

ஆகவே உடலின் மேற் பாகத்திலும் கீழ்ப் பாகத்திலும் உள்ள நிலைக்குத்து உதைப்புக்களை எடுத்து நோக்குமிடத்து, முழு உடலிலுமுள்ள விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பானது உடலால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட பாயியின் நிறைக்குச் சமமாகி இப்பாயியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கூடாக மேன்முகமுமாகத் தாக்கும் எனப் பெறுவோம். இப்புள்ளி மீயுந்தல் மையம் எனப்பட்டு, நிலைக்குத்தாய் மேன்முகமாயுள்ள விளையுள் விசை மீயுந்தல் விசை எனப்படும்.

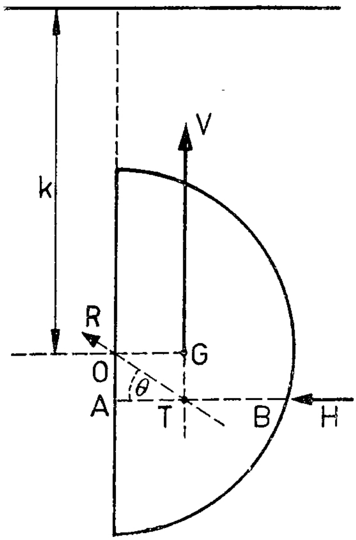
இங்கு (பரப்பிலும் வேருனதான) ஓா உடலேப்பற்றி நாம் சிந்தித்தலால, விளேயுள் கிடை உதைப்பு யாதும் இல்லே. ஏனெனின், உடலே ஒரு நிலேக் குத்துத் தளத்திலே ஒரே எறியற் பரப்பு உடைய இரு பாகங்களாகப் பிரிக்கும் ஒரு கோட்டை நாம் என்றும் உடலின் பரப்பில் வரையலாமாத லால் இரு பாகங்களிலும் கிடை உதைப்புக்கள் சமமும் எதிருமாகும்.

ஆகவே நாம் பெற்ற விளேயுள் நிலேக்குத்து உதைப்பானது உண்மையில் உடலின்மேல் உள்ள பாயியின் மொத்த விளேயுள் உதைப்பாகும்.

முன் கூறியதுபோல் இக்கோடபாடு செய்முறையில் மிக முக்கியமானது. இது ஆக்கிமிடீஸ் என்பவரால் முதன் முதல் நிறுவபபட்டதால் **ஆக்கிமிடீசின் கோட்பாடு** எனப்படும்.

இதற்கு வேறொரு நிறுவல தருவோம்.

ஒரு திண்மத்தின்மீதுள்ள ஒரு பாயியின் விளேயுள் உதைப்பு அதன வடிவையும் நிலேயையுமே சாரு மன்றி அத்திணமத்தின் ஆக்கத் தைச் சாராது. திண்மம் அகற்றப் பட்டு அதே வடிவுள்ள பாயி அதன் இடத்தில் வைககப்படும் எனக் கற்பனே செய்வோமாயின் விளேயுள் உதைப்பு மாருது. ஆனல் இப்போது நாம் ஒரு தொடர்ச்சியான பாயியைப பெறுதலால திண்மத திற்குப் பதிலாக இடப்பட்ட பாயி எஞ்சிய பாயியோடு சமநிலேயில் இருக்கும். இப்பாயின் நிறை அதன் புவியீர்ப்பு மையத்திற் கூடாகக் கீழ்முகமாகத் தாக்கும். இது எஞ் சிய பாயியோடு சமநிலேயில் இருத் தலால் தொடக்கப் பாயியால் திண் மத்தில் உஞற்றப்படும் விளேயுள் உதைப்பு திண்மம் இடங்கொண்ட வெளியை நிரப்பும் பாயின் நிறைக் குச் சமமும் எதிருமாகும்.



படம் 93

திண்மம் பாயியிற் பகுதியாய் உள்ளாழ்த்தப்படுமிடத்தும் செப்பமாய் இதே மாதிரி இக்கோட்பாடு நிறுவப்படலாம். ஆகவே ஆக்கிமிடீசின் கோட் பாட்டைப் பின்வருமாறு நாம் விவரிக்கலாம் :—

ஒரு திண்மம் பகுதியாய் அல்லது முழுவதுமாய் ஓய்விலுள்ள ஒரு பாயியில் உள்ளாழ்த் தப்படுமாயின், திண்மத்தின்மீது பாயியின் விளேயுள் உதைப்பு, திண்மத்தால் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட பாயியின் நிறைக்குச் சமமும் எதிருமாகி இடம்பெயர்க்கப்பட்ட பாயியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கூடாக நிலேக்குத்தாய் மேன்முகமாகத் தாக்கும்.

உதாரணம் 1. r ஆரையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக் கோளம் தனது தளமுகம் நிலைக்குத்தாயும் தனது மையம் k ஆழத்திலும் இருக்குமாறு ρ என்னும் அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படும். அரைக் கோளத்தின் வளைபரப்பில் விளையுள் உதைப்பைக் காண்க.

ஓர் அரைக் கோளத்தின் வளைப்பரப்பிலுள்ள கிடையான உதைப்பை (H) ஏற்கனவே கண்டுள்ளோம் (§ 50, உதாரணம் 1). அது $\pi r^2\rho k$ என்னும் பருமனுடன் BA என்னுங் கோட்டின் வழியே தாக்கும் (படம் 93) ; இங்கு O வானது அரைக் கோணத்தின் மையமாகும். $OA = \frac{r^2}{4k}$ ஆகும். ஆக்கிமிடீசின் கோட்பாட்டிலிருந்து அரைக் கோளத்தில் நிலைக்குத்து உதைப்பு (V) அரைக் கோளததால் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறைக்குச் சமமாகி (அதாவது $\frac{2}{3}\pi r^3\rho$) இத்திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கூடாக மேன்முகமாகத் தாக்கும். G யானது அரைக் கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையமாயின் OG யானது கிடையாகி $\frac{3}{8}r$ இற்குச் சமமாகும்.

அரைக் கோளததை இரு காறபகுதிகளாகப் பிரிக்கும் நிலைக்குத்துத் தளம்பறறி அரைக் கோளம் சமசீராதலால் வேறு யாதும் கிடைக்கூறு இல்லை. அரைக் கோளத்தில் விளையுள உதைப்பு (R)

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{(H^2 + V^2)} \\
&= \sqrt{(\pi^2 r^4 \rho^2 k^2 + \tfrac{4}{9}\pi^2 r^6 \rho^2)} \\
&= \pi r^2 \rho \sqrt{(k^2 + \tfrac{4}{9} r^2)}
\end{aligned}
$$

என்பதாலே தரப்படும்.

V, H என்பனவற்றின் தாக்கக கோடுகள் T யில் ஒன்றையொன்று வெட்ட R ஆனது AT யோடு ஆக்குங் கோணம் θ ஆயின்

$$
\begin{aligned}
\text{தான் } \theta &= \frac{V}{H} \\
&= \frac{\frac{2}{3}\pi r^3 \rho}{\pi r^2 \rho k} \\
&= \frac{2r}{3k}.
\end{aligned}
$$

ஆனால்
$$
\begin{aligned}
\frac{OA}{AT} &= \frac{r^2.8}{4k\,.\,3r} \\
&= \frac{2r}{3k}.
\end{aligned}
$$

∴ R ஆனது O என்னும் மையத்திற்கூடாகச் செல்லும்.

இது வேறு மாதிரி உய்த்தறியப்படலாம். வளைபரப்பில் ஒவ்வோர் உதைப்பும் பரப்புக்குச் செவ்வனுதலால், ஒவ்வொரு மூலகத்திலும் ஒவ்வொரு உதைப்பினது தாக்கக் கோடுகள் மையத்திற்கூடாகச் செல்ல வேண்டும். ஆகவே விளையுள் மையத்திற்கூடாகச் செல்ல வேண்டும்.

53. ஒரு தள வளையியால் உள்ளடக்கப்பட்ட வளைபரப்பில் விளையுள் உதைப்பு

ஒரு தள வளையியால் வரைப்புற்ற வளைபரப்பில் விளையுள் உதைப்பைக் காணவேண்டுமாயின், கிடை உதைப்பையும் நிலைக்குத்து உதைப்பையும் நாம் வேறு வேறுகக் காணவேண்டியதில்லை. ஏனெனின், இத்தொகுதி யானது மூன்று விசைகளினது தாக்கத்தின் கீழ் சமநிலையிலுள்ளது.

(1) வளைபரப்பாலும் தள முகத்தாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பாயியின் நிறை.

(2) தளமுகத்திற்குக் குறுக்காகத் தாக்கும் உதைப்பு.

(3) வளை பரப்புக்குக் குறுக்காகத் தாக்கும் உதைப்பு.

(1), (2) என்பனவற்றின பருமன்களும் திசைகளும் எமக்குத் தெரியு மாயின் (3) என்பதை விசை முக்கோணியிலிருந்து நாம் காணலாம்.

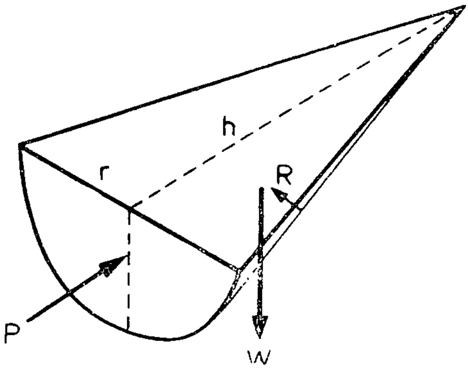
உதாரணம். ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பை அதன் அச்சுக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தால் வெட்டுதலால் ஒரு தாழி ஆக்கப்படும். தாழி, ρ அடர்த்தியுள்ள திரவத்தால் முற்றும் நிரப்பப்படுமாயின் வளைபரப்பில் விளையுள் உதைப்பைக் காணல்.

படம் 94 திரவத்தில் தாக்கும் விசைகளைக் குறிக்க ; இவை பின்வருமாறு.

(1) தள அரைவட்ட முகத தால் உஞற்றப்படும் விசை (P) ;

(2) திரவத்தின் நிறை (W);

(3) வளைபரப்பின் விளையுள் மறுதாக்கம் (R).



படம் 94

அரைவட்ட அடி r என்னும் ஆரை உடையதாயின்

$$P = \tfrac{1}{2}\pi r^2 \cdot \rho \frac{4r}{3\pi} \text{ (§ 27, வகை 8)}$$

$$= \frac{2\rho r^3}{3}.$$

தாழியிலுள்ள நீரின் நிறை (W)

$$W = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3}\pi r^2 h\rho$$

என்பதாலே தரப்படும் ; இங்கு h ஆனது தாழியின் நீளமாகும். ஆகவே W,P என்பன செங்கோணங்களில் இருத்தலால் விசை முக்கோணி யிலிருந்து

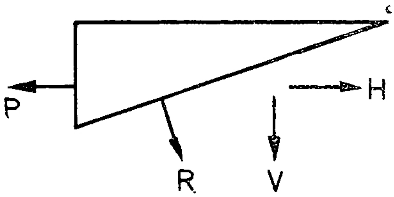
$$R = \sqrt{(p^2 + W^2)}$$

$$= \sqrt{(\tfrac{4}{9}\rho^2 r^6 + \tfrac{1}{36}\pi^2 r^4 h^2 \rho^2)}$$

$$= \tfrac{1}{6}\rho r^2 \sqrt{(16r^2 + \pi^2 h^2)};$$

திரவத்தால் வளைபரப்பில் உஞற்றப்படும் உதைப்பு வளைபரப்பால் திரவத்தில் உஞற்றப்படும் மறுதாக்கத்துக்குச் சமமும் எதிருமாகும். தாழியில் உஞற்றப்படும் விசைகளின் திசைகள் படம் 95 இற் காட்டப்படும்.

இதே முடிபு ; வளைபரப்பில் விளையுள் நிலைக்குத்து உதைப்பு, விளையுள் கிடை உதைப்பு (முறையே V, H) என்பனவற்றைக் காணும் எமது முந்திய முறையாலும் பெறப்படும் என்பது தெளிவாகும். ஏனெனின்,



படம் 95

V = வளைபரப்பில் நிற்கும் பாயியின் நிறை,

அதாவது $V = W$.

H = நிலைக்குத்துத் தளத்தில் பரப்பின எறியத்தில உதைப்பு,

அதாவது $H = P$;

$R = \sqrt{(V^2 + H^2)}$ ஆதலால் முன்போல் அதே முடிபை நாம் பெறுகிறோம்.

R இன திசையைக் காண்பதற்கு அது கிடையோடு θ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குமாயின்

$$தான \theta = \frac{W}{P} \left(அல்லது \frac{V}{H}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\pi r^2 h\rho}{\frac{2}{3}\rho r^3}$$

$$= \frac{\pi h}{4r}$$

வளைபரபபில் விளையுள் உதைப்பின தாக்கக் கோட்டையும் நாம் காணலாம். அரைக கூம்பினுள்ள திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அடியிலிருந்து $\frac{1}{4}h$ தூரமாகும். அரை வட்டத்தின் அமுக்க மையம் மையத்திலிருந்து $\frac{3\pi r}{16}$ தூரமாகும் (§ 47, உதாரணம் 2).

ஆயின படம் 96 இல் B யானது அரை வட்டத்தின அமுக்க மையமும், C யானது P, W என்பனவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியும், A யானது R இன் தாக்கக் கோடு அரை வட்டத் தளத்தை வெட்டும புள்ளியுமாயின் ABC யானது ஒரு விசை முக்கோணியாகி

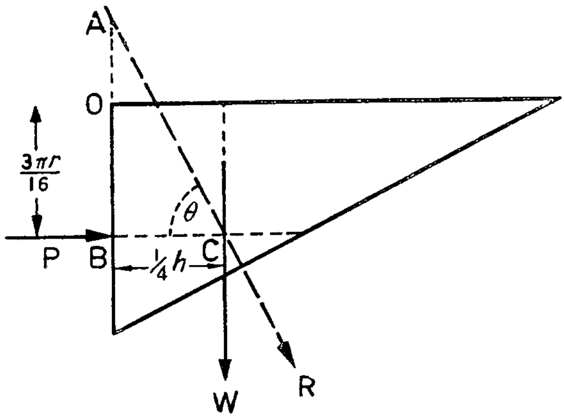
$$\frac{W}{AB} = \frac{P}{BC}$$

அல்லது
$$AB = \frac{W}{P} \times BC.$$

$$=\frac{W}{P}\times\tfrac{1}{4}h$$

$$=\frac{\pi h}{4r}\times\tfrac{1}{4}h$$

$$=\frac{\pi h^2}{16r}.$$



படம் 96

ஆகவே, அரை வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து A யின் தூரம்

$$=\frac{3\pi r}{16}\sim\frac{\pi h^2}{16r}$$

$$=\frac{\pi}{16r}\,(3r^2\sim h^2).$$

இது, $3r^2=h^2$

அல்லது $\frac{r}{h}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆகுமிடத்து

அதாவது, கூம்பின் அரை உச்சிக்கோணம் 30° ஆகுமிடத்து, வளைபரப்பில் விளையுள். உதைப்பின் தாக்கக் கோடு O என்னும் அரை வட்டத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்லும் என்பதைக் காட்டும்.

பயிற்சி VII

1. ஒரு நீர்த் தாங்கி, நீளம் 6 அடி ஆகவும தள அரை வட்ட முனைகளின ஆரை 2 ஆகவும் உள்ள ஓா அரை உருளை வடிவில ஆககப்படும். அது ஓர் அரை வட்ட முனையில நிறுத் தபபட்டு கன அடிககு 70 இரு. அடாத்தியுளள திரவத்தால நிரப்பபபடுமாயின் வளைபரப்பில் விளையுள இடை உதைப்பைக காணக.

2. கன அடிக்கு ρ இரு. அடர்த்தியுள்ள திரவத்தால் நிரப்பப்படும் ஒரு மெல்லிய பொள் அரைக் கோளக் கொள்ளி r அடி ஆரையுள்ள அதன் வட்டமான அடி ஒரு கிடைத் தளத்தைத் தொடுமாறு ஓய்வில் இருக்கும். பின்வரும் விசைகளின் பருமன், திசை, நிலை ஆகியவற்றைக் காணக.
   (i) வளைபரப்பிலே தாக்கும் உதைப்பின் விளையுள் நிலைக்குத்துக் கூறு.
   (ii) இதே உதைப்பின் விளையுள கிடைக் கூறு.
   (iii) வளைபரப்பில் விளையுள் உதைப்பு.
   (iv) தள அடியில் விளையுள உதைப்பு.

3. ஒரு செங்கூம்பை அதன அச்சுக்கூடாகச செல்லும ஒரு தளத்தால் இருகூறிடுதலாற் பெறப்படும் ஓர் அரைக் கூம்பின் வடிவம் போல ஒரு திறந்த உச்சியுள்ள நீர்தாங்கி ஆக்கப்படும். அது ρ அடர்த்தியுள்ள திரவத்தால் நிரப்பப்பட்டு அதன முக்கோணி முகம நிலைக்குத்தாகவும் அதன உச்சி கீழ்முகமாகவும் வைக்கப்படும். r ஆனது அரை வட்ட உச்சியின் ஆரையும் h ஆனது உயரமும் ஆயின் பினவருவனவற்றின பருமனைக காணக.
   (i) வளைபரப்பில் விளையுள நிலைக்குத்து உதைப்பு.
   (ii) வளைபரப்பில் விளையுள கிடை உதைப்பு.
   (iii) வளைபரப்பில விளையுள் உதைப்பு.
   (iv) இவ்விளையுள கிடையோடு ஆக்கும θ எனனுங் கோணம்.

4. 4 இருத்தலுள்ள ஒரு திரவத்தைக் கொள்ளும் ஓர் அரைக் கோளக் கிண்ணம் அதன் விளிம்பு ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொடுமாறு பிடிக்கப்படும.
   (i) சுவரில,
   (ii) கிண்ணத்தில், தாக்கும விளையுள் திரவ உதைப்பின் பருமனைக் காண்க.

5. அரைக் கோள முனைகள் உள்ள ஓர் உருளைக் கொதிகலம் அதன் அச்சுக் கிடையாகுமாறு ஏற்றப்படும. அதன் முழு நீளம அதன் உயர் குறுக்குவெட்டு விட்டத்தின இரு மடங் காகும. அது நீரால நிரப்பப்படுமிடத்து ஓர் அரைக் கோள முனையில் தாக்கும் உதைப்பின் கிடைக்கூறு 0·3W எனக் காட்டுக ; இங்கு, W ஆனது கொதிகலம் கொள்ளும் நீரின நிறையாகும்.

6. தன் உயரம் 3 சமீ. ஆகவும் தன் அடியின் பரப்பளவு 10 சதுர சமீ. ஆகவும் உள்ள ஒரு கூம்பு நீரால நிரப்பப்பட்டு உச்சி மேன்முகமாகுமாறு ஒரு கிடை மேசையில் வைக்கப்படும்.
   (i) அடியில்,
   (ii) வளைபரப்பில, விளையுள் உதைப்பைக் காண்க.

7. தன உயரம 4 அங். ஆகவும், அடியின் ஆரை 3 அங். ஆகவும உள்ள ஒரு பொட் கூம்பு தன் அடி கிடையாகுமாறும் உச்சி கீழ்முகமாகுமாறும நிறுத்தப்படும். கூம்பு நீரால் நிரப்பப்படுமிடத்து வளைபரப்பில் விளையுள உதைப்பைக் காண்க.

8. ஈற்றுக் கேள்வியிலுள்ள கூம்பானது தன் அடியில நிற்குமாறு நேர்மாறுக்கப்படு மாயின் வளைபரப்பில விளையும உதைப்பின அதிகரிப்பைக் காணக.

9. a நீளமுள்ள ஒரு திறந்த கிடையான வாய்க்கால் ρ அடர்த்தியுள்ள திரவத்தால் நிரப்பப்படும். அதன் குறுக்குவெட்டு r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் கால் பகுதியாகும். வாய்க்காலின் தளப் பக்கம நிலைக்குத்தாகும். வளிமண்டல அமுக்கத்தைப் புறக் கணித்துக் கொண்டு வளைபரப்பில விளையுள் திரவ உதைப்பின் பருமனையுந் திசையையுங் காண்க.

10. 7 சமீ. ஆரை உள்ள ஒரு திண்ம அரைக் கோளம் அதன் வளைபரப்பு மிகமேலாகு மாறும் அதன் தளபரப்பு 20 சமீ. ஆளத்திற இடையாகுமாறும் 1·5 என்னும் தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படும். தளப் பரப்பிலும் வளைபரப்பிலும விளையுள நிலைகுத்து உதைப்புக்களைக் காண்க.

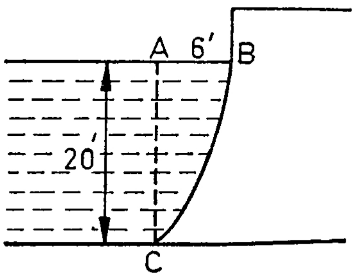
11. அடியில அடைக்கப்படாததும் 4 அடி உள்ளாரையும் 10 அடி உயரமும் உள்ள ஒரு பொட் கூம்பு அதன் விளிம்பு ஒரு கிடைத தளத்தில இருக்குமாறு வைக்கப்படும். உச்சியிலுள்ள ஒரு துளைகூடாகக் கூம்பு நீரால நிரப்பப்படும் ; இந்நீர் வெளிப்பாயாது. நீர் கூம்பை உயர்த்தும் விசையைத் தொன நிறையிற் காணக.

12. r ஆரையும் l நீளமும் உள்ள ஓா அடைதத உருளை அலகுக் கனவளவுக்கு w என்னும் நிறையுள்ள திரவததால் நிரப்பப்படும். அதன் அச்சு கிடையாகுமாறு உருளை பிடிக் கப்படுமாயின, அச்சுககூடாக வரையப்படுங் கிடைத தளத்தால் துணியப்படும் வளைபரப்பின் கீழ் அரைப் பஙகில் திரவ உதைப்பைக காண்க.

தளமுனைகள் கிடையோடு 60° சயவு கொள்ளுமாறு உருளை சரிககப்படுமாயின் கீழ்த் தளமுனையில திரவ உதைப்பைக காண்க

(*Inter Sc.*)

13. இவ் வரிப்படம் BC என்னும் வளைநத பக்கமுள்ள ஒரு நீரதடுப்புச் சுவரினது வெட்டின் ஒரு பாகததைக காட்டும்.



AC நிலைகுத்தாயும ABC என்னும வெட்டின பரப்பளவு 80 சதுர அடியும் ஆயின் காட்டிய அளவுகளிலிருந்து நீர்த தடுப்பின் ஓா அடி நீளத்தில உதைப்பின விளையுள் நிலைகுத்துக் கூறு, கிடைக கூறுகளின பருமன்களைக காணக. இதன துணைகொணடு சுவரின் அலகு நீளததில விளையுள் உதைப்பின பருமனையுந் திசையையுங் காணக.

14. 1 அடி ஆரையுளள கோளம் தனது மிக உயாந்த புள்ளி பரபபிலிருககுமாறு நீரில உளளாழ்ததப்படும். நீரின் அடர்த்தி கன அடிக்கு 62·5 இரு. எனககொண்டு (i) கோளப பரப்பின் மேல் அரைப்பாகத்தில் (ii) கீழ் அரைப்பாகத்தில விளையுள் நீர உதைபபைக காண்க.

(*H.S.C.,I.*)

15. அரைக கோள வடிவுள்ள ஒரு கிண்ணம நீரால் நிரப்பப்படும். அதன் மையத்திற் கூடாகச் செலலும் ஒரு நிலைகுத்துத் தளம அதனைப பிரிககும் இரு பாகஙகளுள் ஒன்றில நிலைக்குதது உதைபபையும் கிடை உதைப்பையும் அரைக்கோளத்திலுள்ள நீரின நிறையாகிய W பற்றிக காண்க.

(r ஆரையுளள அரை வட்டததின் புவியீர்ப்பு மையம் மையத்திலிருநது $\frac{4r}{3\pi}$ தூரமாகும்.)

16. 1 அடி உயரமும் 60° உச்சிக் கோணமும உள்ள ஒரு திணம செவவட்டக் கூம்பு அதன் அச்சு நிலைகுத்தாகுமாறும் அதன் உச்சி பரப்பிலிருககுமாறும நீரில உளளாழத் தப்படும். அசசுககூடாகச் செல்லும் ஒரு தளம் வளைபரபபை வெட்டுதலாற் பெறப் படும் ஒரு பாகத்தில விளையுள உதைப்பின திசையையும பருமனையுங காணக.

17. ஓர் அடைத்த பாண்டம் ஒரு முனை தளமாகவும் மற்றையது ஓர் அரைகோளமாகவும் உள்ள செவவட்ட உருளை வடிவமாகும். பாண்டம் திரவததால நிரப்பபபட்டு அதன் அசசு கிடையாகுமாறு ஓய்விலிருககுமாயின அரைக்கோளத்தின் முனையிலும் தள முனையிலும் திரவ உதைப்புக்கள அண்ணளவாய் 6 : 5 எனனும் விகிததகிலிருககு மெனக காட்டுக.

பாணடததின் முழுப பரபபிலும உளள விளையுள திரவ உதைபபு தள முனையிலுள்ள உதைபபோடு கொள்ளும விகிதம 17 : 3 ஆயின, பாணடத்தின மொதத நீளம் அதன் ஆரையோடு கொளளும விகிததததைக காணக.

18. நீர் நிரம்பிய ஓர் அடைத்த வட்ட உருளை அதன மேல விளிம்பின ஒரு புள்ளியிலிருந்து சுயாதீனமாயத தூங்கும. அதன குறுககுவெட்டு ஆரை அதன நீளத்தின் அரைப பங்காயின், அதன் வளைபரபபில விளையுள் உதைபபின் நிலைக்குததுக கூறு கிடைக கூறு ஆகிய ஒவவொனறும அவ்வுருளை கொளளும நீர நிறையின அரைப பங்காகும் என நிறுவுக.

19. தத்தம் விளிமபுகளின் மிக உயாந்த புளளிகளிற பிணைககபபட்டு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளததில தொடுகையிலுள்ள இரு சம அரைககோளஙகளால ஒரு கோள ஓடு ஆககபபடும. நீர நிரம்பிய இவவோடு பிணையலில் தொஙகுமாயின, $W' > 3\,W$ ஆகுமிடத்து அரைக்கோளஙகள ஒனறையொன்று விடடுப பிரியாதெனக காடடுக. இஙகு W' ஆனது முழு ஓட்டின் நிறையும W வானது அது கொள்ளும் நீர் நிறையு மாகும்.

அன்றியும ஒவ்வோர் அரைக்கோளததிலும் விளையுள் திரவ உதைபபு $\frac{W}{4}\sqrt{13}$ எனக் காட்டுக.

20. a ஆரை உள்ள ஒரு திணம அரைககோளம் அதன தளப பரபபின் மையம ஒரு திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பின் கீழ h ஆழததிலிருக்குமாறும அதன அடியின தளம கிடையோடு θ கோணச சாயவு கொளளுமாறும இததிரவத்தில உள்ளாத்தபபடும். அரைககோளததிலே தாக்கும திரவ அமுக்கங்களை எடுத்து நோககி வட்ட அடியின அமுக்க மையம் அதன கேததிரகணித மையத்திலிருநது a^2 சைன $\theta/4h$ எனசகாடடுக. *(H.S.C., III)*

21. நீர நிரம்பிய ஓர் உருளைப் பாணடம் அதன் அசசு நிலைக்குததோடு 45° கோணததில் சாய்நதிருககுமாறு பிடிககப்படும. முனைகளிலுளள அமுககத்தின் பருமன்களைக காண்க. வளைப்பரபபில் விளையுள அமுககமானது முனைகளின் அமுகக விததியாசததிறகுச் சமன எனக் காடடுக.

22. W நிறையுள்ள ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளம் அதன் வளைபரபபு ஒரு திரவத்திற பகுதியாய் உளளாழததப்பட்டு அதன் விளிம்புப் புளளி ஒன்று பரப்பிலிருக்குமாறு மிதககும். இபபுள்ளியிற் பிரயோகிககப்படும் pW என்னும் நிலைக்குதது விசையால திணம அரைக் கோளத்தின் சமநிலை பேணப்படும். அரைக்கோளததின் தள முகம் கிடையோடு $\frac{3}{4}$ என்னும் தான்சன உளள கோணததிற சாயுமாயின் p யின் பெறுமானத தைக காண்க.

அரைக் கோளததினது அடர்ததி திரவ அடர்த்திக்குக கொள்ளும் விகிததததையுங் காண்க.

(*a* ஆரை உள்ள கோளத்தின *h* என்னும் உயரமுள்ள கவிப்பின் கனவளவு $\pi h^2 (a - h/3)$ எனவும், *a* ஆரை உள்ள அரைக கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம அதன் தள முகத்தின் மையத்திலிருந்து $\frac{3a}{8}$ என்னுந் தூரம எனவும் எடுததுக் கொள்க.)

(*H.S.C., I.*)

23. *r* ஆரை உளள அரைக்கோளம அதன தள அடி கிடையோடு θ கோணச் சாயவு கொள்ளுமாறும், அதன் மையம *h* (> *r*) என்னும் ஆழமாகுமாறும், வளைபரப்பு மிகமேலாகுமாறும் நீரில் உள்ளாழ்ததப்படும. வளைபரபபில விளையுள உதைப்பு கிடையோடு

$$\text{தான}^{-1}\left[\left(\frac{2r}{3h}\right)\text{கோசி}\ \theta - \text{கோதா}\ \theta\right]$$

என்னுஞ் சாயவில மையத்திற்கூடாகத தாககும் ஒரு விசை எனக காட்டுக.

24. ஒரு திண்மக கோளம் அதன் மையததிற் கூடாகச் செல்லும் தம்முள செஙகுத்தான மூனறு தளஙகளால் எட்டுச் சம பாகஙகளாகப் பிரிககபபடும். இபபாகஙகளுள ஒனறு ஒரு தள முகம் பரப்பிலிருககுமாறு நீரில உள்ளாழ்த்தப்படும். இபபாகத்தால இடம் பெயர்ககபபட்ட நீரின் நிறை W ஆயின வளைபரபபில விளையுள் உதைப்பு $W (\pi^2 + 8)^{\frac{1}{2}}/\pi$ என நிறுவுக.

25. ஈற்றுக் கேளவியில எடுத்து நோக்கபபட்ட கோளப பாகம், திரும்பாதவாறு *h* தூரத் திறகுத தாழததப்படுமாயின மூன்று தள முகஙகளிலுமுளள உதைபபுககள ஒன்றி விசைககு ஒடுஙகுமெனக காட்டி அதன பருமனைக காண்க.

26. ஒரு கணணாடியின அடி ஓர் அஙகுல விட்டமுளள வட்டம ஆக, அதன் பககம் கீழ் முகமான உசசியுடன 30° அரை உசசிக கோணமுள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூமபின் பாகமாகும. கணணாடி 6 அங்குல உயரத்திறகு நீரால நிரப்பப்படும. ஒரு கன அடி நீர 1,000 அவுன்சு நிறையெனத் தரப்படுமாயின் கணணாடியின பககததில விளையுள் அமுககததை அணணளவாய அவுனசிற் காணக.

27. 2α உசசிக கோணமுளள ஒரு திண்மக கூம்பு ஒரு பிறப்பிககுங கோடு பரப்பிலிருககு மாறு ஒரு திரவததில உள்ளாழத்தபபடும. வளைபரபபில் விளையுள உதைபபு கிடையோடு

$$\text{தான்}\ \theta = \tfrac{2}{3}\ \text{கோசி}\ 2\alpha - \text{தான}\ \alpha$$

எனபதாலே தரபபடும θ என்னும கோணத்தை ஆக்குமெனக் காட்டுக.

இவவிளையுள் உதைப்பு கிடையாயின இதன் பருமன் கூமபின அடி ஆரைக்குச சமமான ஆரையுளள அரைக் கோளத திரவததின நிறையாகுமெனக காட்டுக.

விடை

1. 5040 இரு. நிறை.
2. (i) $\pi r^3 \rho/3$, கோள மையத்திறகூடாக நிலைககுத்தாய் மேலமுகமாக ;
   (ii) 0 ; (iii) (i) இல் உள்ளதுபோல் ;
   (iv) $\pi r^3 \rho$, கோள மையததிற்கூடாக நிலைககுத்தாயக கீழ்முகமாக.
3. (i) $\pi r^2 h \rho/6$ கீழ்முகமாக ; (ii) $r h^2 \rho/3$ கிடையாய் ;
   (iii) $r h \rho\ (4h^2 + \pi^2 r^2)^{\frac{1}{2}}/6$; (iv) தான் $^{-1}\left(\frac{\pi r}{2h}\right)$.

4. (i) 6 இரு. நிறை ; (ii) 7·21 இரு. நிறை.

6. (i) 30 கி. நிறை ;
(ii) 20 கி. நிறை, நிலைக்குத்தாய் மேல்முகமாகத் தாக்கிக்கொண்டு.

7. 21·8 அவுன்சு நிறை. 8. 21·8 அவுன்சு நிறை.

9. 0·93 $r^2a\rho$, 57° 30′ கிடையோடு.

10. 4·62 கி. கி., 3·45 கி. கி. 11. 9·35 தொன் நிறை.

12. $r^2lw\ (\pi+4)/2,\ \pi r^2w\ (l+r\sqrt{3})/2$.

13. கிடைக் கூறு $=12{,}500$ இரு. நிறை ; நிலைக்குத்துக் கூறு $=5000$ இரு. நிறை.
விளையுள் உதைப்பு $=13{,}463$ இரு. நிறை கீழ்முகமாகக கிடையோடு 21° 48′ இல்.

14. (i) 65·45 இரு. நிறை ; (ii) 327·25 இரு. நிறை.

15. நிலைகுத்து உதைப்பு $=W/2$; கிடை உதைப்பு $=W/\pi$.

16. 32·476 இரு. நிறை, கீழ்முக நிலைகுத்தோடு 47° 48′ இல.

17. 6 : 1.

21. $\pi r^3\rho/\sqrt{2},\ \pi r^2\rho\ (r+l)/\sqrt{2}$; இங்கு $r=$ வட்டக குறுககு வெட்டின் ஆரை, $l=$ உருளையின நீளம, $\rho=$ நீரின் அடர்த்தி.

22. $p=9/32$, 0·02 : 1.

25. $\rho r^3\ (27\pi^2h^2+48\pi rh+32r^2)/12$; இஙகு $r=$ கோளத்தின் ஆரை.

26. 62·5 அவுனசு நிறை.

அதிகாரம் VIII

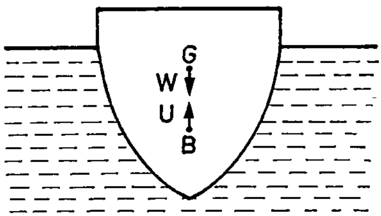
மிதக்கும் உடல்களின் சமநிலை

54. ஒரு திரவத்தில் சுயாதீனமாய் மிதக்கும் உடலின் சமநிலை நிபந்தனைகள்

ஈற்று அதிகாரத்தில் யாதும் ஒரு பரப்பில் பாயியின் விளையுள் உதைப்பைப் பற்றிச் சிந்திக்கப்பட்டது ; § 52 இல் ஓர் அடைத்த பரப்பின் வகையை, அதாவது உள்ளாழ்த்தப்பட்ட ஓர் உடலின் வகையை, எடுத்து நோககியுள்ளோம். ஆக்கிமிடீசின கோட்பாட்டை உய்த்தறிந்தோம் ; இது மிக முக்கியமானதால் இதனை மீண்டும் எடுத்துக் கூறுவோம் :— ஓய்விலுள்ள ஒரு பாயியில் ஒரு திண்மம் பகுதியாய் அல்லது முழுவதுமாய் உள்ளாழ்த்தப்படுமிடத்து திண்மத்திலே தாக்கும் பாயியின் விளையுள் உதைப்பானது திண்மத்தால் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட பாயியின் நிறைக்குச் சமமாகி இடம் பெயர்க்கப்பட்ட பாயியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கூடாக நிலைக்குத்தாய் மேல் முகமாகத் தாக்கும்.

இது பாயிகள் எல்லாவற்றிற்கும் உண்மை என நிறுவப்பட்டதாதலால், இது திரவங்களுக்கு உள்ளதுபோல் வாயுக்களுக்கும் உண்மையாகும். இப் பிரிவில் ஒரு திரவத்திற் சுயாதீனமாய் மிதக்கும் ஓர் உடலின் சமநிலை நிபந்தனைகளைப்பற்றிச் சிந்திப்போம். வாயுக்களைப்பற்றிய நோக்கல் அதிகாரம் X வரை விடப்படும்.

படம் 97 ஆனது ρ அடர்த்தியுள்ள திரவத்திற் சுயாதீனமாய் மிதக்கும் ஓர் உடலின் வெட்டைக் குறிக்கும்.



படம் 97

பின்வரும் இரு நிலைக்குத்து விசைகள் மட்டுமே உடலில் தாக்குவன :—

(1) உடலின் புவியீர்ப்பு மையம் (G) என்பதற்கூடாகத் தாக்கும் உடலின் நிறை (W).

(2) இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறைக்குப் பருமனிற் சமமாகி, மீயுந்தல் மையம் (B) அல்லது இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கூடாக மேல்முகமாகத் தாக்கும் மேலுதைப்பு அல்லது மீயுந்தல் விசை (U).

சமநிலைக்கு இவ்விரு விசைகளும் சமமாகி ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டில் எதிர்த் திசைகளிலே தாக்கவேண்டும் ; ஆகவே, சமநிலையில்

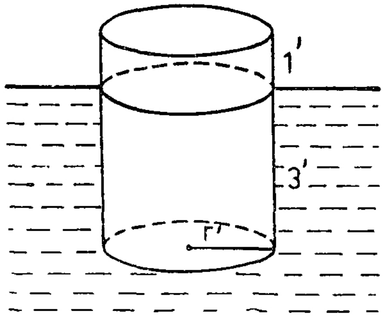
(1) $W = U$;

(2) B, G என்பன ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டில் உள்ளன.

இக்கோட்பாட்டை எடுத்துக்காட்டும் சில உதாரணங்கள் இப்போது தரப் படும்.

உதாரணம் 1. **4 அடி நீளமுள்ள ஒரு திண்ம மர உருளை அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாய் 3 அடி ஆழத்திற்கு உள்ளாழ்த்தப்பட்டு நீரில் மிதக்கும். மரத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க.**

நாம் செய்யவேண்டியது என்னவெனில், உருளையின் நிறையை இடம் பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறைக்குச் சமப்படுத்த வேண்டும்.



படம் 98

படம் 98 உருளையைக குறிக்குமாயின், உருளையின் வெட்டு r அடி ஆரை உளளது என உத்தேசிப் போம். ஆயின்

உருளையின் கனவளவு $= \pi r^2.4$ கன அடி, எனப் பெறுவோம்.

$\therefore$ உருளையின் நிறை $= \pi r.^2 4.s.62\frac{1}{2}$ இரு நிறை............(i).

இங்கு s ஆனது மரத்தின தன் னீர்ப்பு.

அன்றியும்,

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் கனவளவு $= \pi r^2.3$ கன அடி ;

$\therefore$ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின நிறை $= \pi r^2.3.62\frac{1}{2}$ இரு. நிறை......(ii)

(i), (ii) எனபனவற்றைச் சமப்படுதத

$$\pi r^2.4.62\tfrac{1}{2}s = \pi r^2.3.62\tfrac{1}{2}$$; எனப் பெறுவோம்.

$$\therefore \quad 4s = 3,$$

அல்லது $s = \frac{3}{4}$.

ஆயின் மரத்தின் தன்னீர்ப்பு $\frac{3}{4}$ ஆகும் ; அலலது, வேறு மாதிரிக் கூறின், கன அடிக்கு அதன் நிறை $\frac{3}{4} \times 62\frac{1}{2}$ (அல்லது $46\frac{7}{8}$) இருத்தல் ஆகும்.

உதாரணம் 2. **பனிக்கட்டியின் தன்னீர்ப்பு கடல் நீரின் தன்னீர்ப்பு என்பன முறையே 0·918, 1·026 ஆயின் ஒரு மிதக்கும் பனிப்பாறையினது முழுக் கனவளவின் $\frac{2}{19}$ பங்கு நீரின் மேல் இருக்கும் எனக் காட்டுக.**

பனிப்பாறையின் கனவளவு V கன அடியும், கடற்பரப்பின் மேலுள்ள கனவளவு v கன அடியுமாகுக.

ஆயின், பனிப்பாறையின் நிறை $= V\ (0{\cdot}918)\ 62\frac{1}{2}$ இரு நிறை ;
இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கடல் நீரின் கனவளவு $V - v$.
ஆதலால், இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை $= (V - v)(1{\cdot}026)62\frac{1}{2}$ இரு. நிறை. இந் நிறைகள் சமமாதலால்

$$(V - v)(1{\cdot}026)\ 62\tfrac{1}{2} = V(0{\cdot}918)62\tfrac{1}{2};$$

$$\therefore\quad V(1{\cdot}026 - 0{\cdot}918) = 1{\cdot}026v\ ,$$

அல்லது

$$0{\cdot}108\ V = 1{\cdot}026v;$$

$$\therefore\quad \frac{v}{V} = \frac{0{\cdot}108}{1{\cdot}026}$$

$$= \tfrac{2}{19}\ ;$$

$$\therefore v = \tfrac{2}{19}\ V\ ,$$

அதாவது, பனிப்பாறையினது முழுக் கனவளவின் $\frac{2}{19}$ பங்கு நீருக்கு மேலிருக்கும்.

உதாரணம் 3. கன அடிக்கு 64 இரு. நிறை உள்ள கடல் நீரில் முற்றாய் உள்ளாழ்த்தப் பட்டு மிதக்கும் 1 தொன் நிறையுள்ள சுரங்கத்தின் கனவளவு என்ன ?

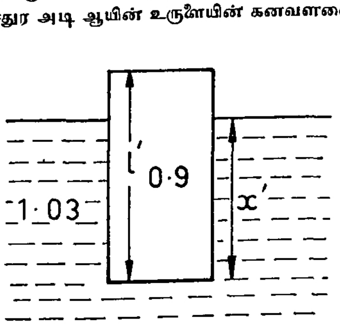
சுரங்கத்தின் கனவளவு V கன அடி, ஆயின் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கடல் நீரின் நிறை $=$ 64V இரு. நிறை.

சுரங்கத்தின் நிறை $=$ 2240 இரு. நிறை.

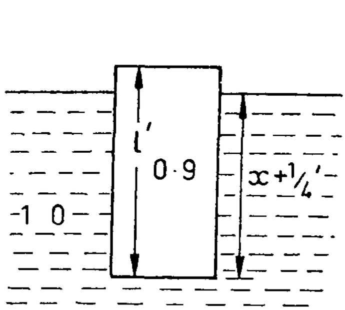
$$\therefore\quad 64\ V = 2240\ ;$$

$$\therefore\ V = \frac{2240}{64} = 35 \text{ கன அடி.}$$

உதாரணம் 4. 0·9 தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு சீரான வட்ட உருளை 1·03 தன்னீர்ப்புள்ள உப்பு நீரில் நிலைக்குத்தாய் மிதக்கும். தூய நீருக்கு இடமாற்றப்படுமிடத்து உருளையானது கூடுதலாக 3 அங்குலம் உள்ளாழ்த்தப்பட்டு மீண்டும் நிலைக்குத்தாய் மிதக்கும். குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு 1 சதுர அடி ஆயின் உருளையின் கனவளவைக் காண்க. (*Inter. Sc.*)



படம் 99



படம் 100

படம் 99, படம் 100 என்பன முறையே உப்பு நீரிலும் தூய நீரிலும் உருளை மிதத்தலைக் குறிக்க. உருளையின் நீளம் l அடி எனவும், உப்பு நீரில் x அடி உள்ளாழ்த்தப்படும் எனவும் உத்தேசிக்க.

ஆயின், கேள்வியில் தரப்பட்ட தகவலிலிருந்து, தூய நீரில் இருக்கும் போது $(x+\frac{1}{4})$ அடி உள்ளாழ்த்தப்படும்.

உருளையின் நிறையானது அது மிதக்குந் திரவத்தைச் சாராது. உருளையின் குறுக்குவெட்டு பரப்பளவு 1 சதுர அடி ஆதலால்

அதன் கனவளவு $= l$ கன அடி ஆகும்.

$\therefore$ உருளையின் நிறை $= l(0{\cdot}9)w$ இரு. நிறை..............(i) ,

இங்கு w ஆனது ஒரு கன அடி தூய நீரின் நிறையாகும். ($w = 62{\cdot}5$ இரு. நிறை என்பது எமக்குத் தெரியவேண்டியதில்லை.)

உருளை கடல் நீரில் உள்ளாழ்த்தப்படுமிடத்து இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவம் 1 சதுர அடி குறுக்கு வெட்டும் x அடி நீளமும் உள்ள ஒரு உருளையாகும்.

$\therefore$ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கடல் நீரின் கனவளவு $= x$ கன அடி.

இடம்பெயாக்கப்பட்ட கடல் நீரின் நிறை $= x\,(1{\cdot}03)\,w$ இரு. நிறை....(ii)

உருளையின் நிறை இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கடல் நீரின் நிறைக்குச் சமமாதலால் (i), (ii) என்பனவற்றைச் சமப்படுத்த

$$l\,(0{\cdot}9)\,w = x\,(1{\cdot}03)\,w\,,$$ எனப் பெறுவோம்.

அல்லது $$1{\cdot}03\,x = 0{\cdot}9\,l \quad ....(iii),$$

x, l என்பனவற்றிற்கு இது ஒரு சமன்பாடாகும். வேறு ஒரு சமன் பாட்டைப் பெறுதற்கு இடம்பெயர்க்கப்பட்ட தூய நீரின் நிறையை எடுத்து நோக்கவேண்டும்.

படம் 100 இலிருந்து,

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட தூய நீரின் கனவளவு $= (x+\frac{1}{4})$ கன அடி.

$\therefore$ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட தூய நீரின் நிறை $= (x+\frac{1}{4})\,(1{\cdot}0)\,w$ இரு. நிறை ....(iv)

இது உருளையின் நிறைக்குச் சமமாதலால் (i), (iv) என்பனவற்றைச் சமப்படுத்த

$$l\,(0{\cdot}9)w = (x+\tfrac{1}{4})\,(1{\cdot}0)\,w\,,$$

அல்லது $$x + 0{\cdot}25 = 0{\cdot}9\,l \,..............................(v).$$

இப்போது l ஐத் துணிதற்கு எமக்கு (iii), (v) என்னும் இரு சமன் பாடுகள் உண்டு.

(v) இலிருந்து $x = 0{\cdot}9l - 0{\cdot}25.$

(iii) இல் x இற்குப் பிரதியிட,

$$1{\cdot}03(0{\cdot}9l - 0{\cdot}25) = 0{\cdot}9l\ ;$$

$$\therefore\ 0{\cdot}9 \times 0{\cdot}03\, l = 1{\cdot}03 \times 0{\cdot}25,$$

$$\therefore\ l = 9{\cdot}54 \text{ அடி.}$$

ஆகவே உருளையின் கனவளவு 9·54 கன அடி ஆகும்.

உதாரணம் 5. வெளி விட்டம் $2a$ அங்குலமாயுள்ள ஒரு பொட்கோளம், t அங்குலத் தடிப்பும் 4 தன்னீர்ப்பும் உள்ள சடத்தால் ஆக்கப்படும். 1·141 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் இக்கோளம் அரைப்பங்கு உள்ளாழ்த்தப்பட்டு மிதக்கும். $t = 0{\cdot}05\,a$ என நிறுவுக.

(Inter. Sc.)

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவம் a ஆரையுள்ள அரைக் கோளமாதலால்,

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் கனவளவு $= \frac{2}{3}\pi a^3$ கன அங்.

$\therefore$ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை $= \frac{2}{3}\pi a^3\ (1{\cdot}141)\, w$ இரு. நிறை ....(i) ;

இங்கு w ஆனது 1 கன அங்குல நீரின் நிறையாகும்.

கோள ஓட்டின் வெளி ஆரை a ஆகி, உள்ளாரை $a - t$ ஆதலால்,

கோள ஓட்டின் கனவளவு $= \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi (a-t)^3$ கன அங்.

$= \frac{4}{3}\pi\,(3a^2t - 3at^2 + t^3)$ கன அங்.

$\therefore$ கோள ஓட்டின் நிறை $= \frac{4}{3}\pi\,(3a^2t - 3at^2 + t^3)\,4w$ இரு. நிறை ....(ii)

(i), (ii) என்பனவற்றைச் சமப்படுத்த,

$\frac{2}{3}\pi a^3\,(1{\cdot}141)\,w = \frac{4}{3}\pi\,(3a^2t - 3at^2 + t^3)\,4w$ எனப் பெறுவோம்.

அல்லது, $a^3\,(1{\cdot}141) = 8\,(3a^2t - 3at^2 + t^3)$ .... (iii).

இது t இல் ஒரு முப்படிச் சமன்பாடாகும் ; ஆனால் $t = 0{\cdot}05\ a$ என்பதையே நாம் சரி பார்க்கவேண்டியதால் நாம் (iii) இன் வலதுகைப் பக்கத்தில் t யின் இப்பெறுமானத்தை பிரதியிட்டு அதன் பெறுமானம் $1{\cdot}141\,a^3$ ஆகுமெனப்பதை மெய்ப்படுத்தலாம்.

ஆயின் (iii) இன் வலதுகைப் பக்கம் தருவது

$$8\left(3a^2.\frac{a}{20} - 3a.\frac{a^2}{400} + \frac{a^3}{8000}\right)$$

$$= a^3\,(1{\cdot}2 - 0{\cdot}06 + 0{\cdot}001)$$

$$= 1{\cdot}141a^3.$$

ஆகவே $t = \frac{1}{20}a$ என்பது (iii) இன் ஒரு தீர்வு ஆகும். எனினும் நாம் முதன் முதலாக ஓட்டின் உள்ளாரையை x என எழுதுதலால் இசைவின்றிய இம் முப்படிச் சமன்பாட்டை விலக்கிக் கொள்ளலாம்.

ஆயின் கோள ஓட்டின் கனவளவு $= \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi x^3$ ஆகி (ii) இற்குப் பதிலாக

கோள ஓட்டின் நிறை $= \frac{4\pi}{3}(a^3 - x^3).4w$ இரு. நிறை என்பது பெறப் படும். இதனை (i) இற்குச் சமப்படுத்த,

$$\tfrac{2}{3}\pi a^3 (1{\cdot}141)\,w = \tfrac{16}{3}\pi (a^3 - x^3)\,w\ ,$$

அதாவது,
$$1{\cdot}141\,a^3 = 8a^3 - 8x^3\ ;$$

$$\therefore\quad 8x^3 = 6{\cdot}859a^3\ ;$$

$$\therefore\quad 2x = 1{\cdot}9a\ ;$$

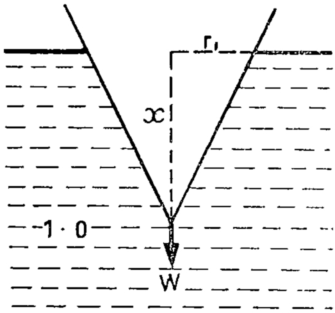
$$\therefore\quad x = 0{\cdot}95a,$$

$$t = a - x = 0.05a.$$

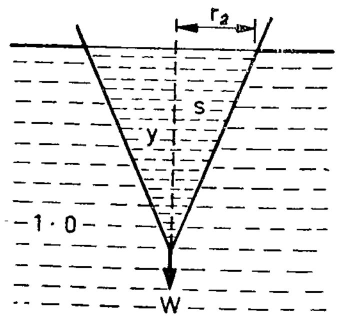
உதாரணம் 6. தடிப்பு புறக்கணிக்கத்தக்க சடத்தால் ஆக்கப்பட்ட ஓர் இலேசான கூம்புருவ ஓட்டின் உச்சியிலே W நிறை தொடுக்கப்பட்டு, உச்சி கீழ்முகமாகவும், நிலைக்குத்தான அதன் அச்சின் x நீளம் உள்ளாழ்த்தப்பட்டும் நீரில் மிதக்கும். நீர் மட்டமும் திரவத்தின் மட்டமும் சமமாகும்வரை கூம்புக்குள் s தன்னீர்ப்புள்ள திரவம் வார்க்கப்படும். இப்போது அச்சின் உள்ளாழ்த்தப்பட்ட நீளம் y

$$s = 1 - x^3 / y^3$$

என்பதாலே தரப்படும் எனக் காட்டுக. (Inter Sc.)



படம் 101



படம் 102

படம் 101 நீரில் மிதக்கும் வெறுங் கூம்பையும், படம் 102 திரவ மட்டமும் நீர் மட்டமும் ஒன்றுகுமாறு திரவம் வார்க்கப்படும் வகையையும் குறிக்கட்டும். இரு வகைகளிலும் நீர்பபரப்பிற் கூம்பின் வட்டவெட்டுக்களின் ஆரைகள் முறையே r_1, r_2 என உத்தேசிக்க.

ஆயின் படம் 101 இலிருந்து,

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் கனவளவு $= \frac{1}{3}\pi r_1^2 x$;

$\therefore$ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின நிறை $= \frac{1}{3}\pi r_1^2 xw$;

இங்கு w ஆனது அலகுக் கனவளவு நீரின் நிறை.

கூம்பு ஓட்டின் நிறை புறக்கணிக்கப்படுதலால், உச்சியிலே தொடுக்கப்படும் நிறை (W) மாத்திரமே கீழ்முக விசையாகும். ஆகவே,

$$W = \text{இடம்பெயர்ந்த நீரின் நிறை}$$
$$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 xw \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

படம் 102 இலிருந்து,

இப்போது இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் கனவளவு $= \frac{1}{3}\pi r_2^2 y$;

$\therefore$ இடம்பெயர்ககப்பட்ட நீரின் நிறை $= \frac{1}{3}\pi r_2^2 yw$.

மொத்தக் கீழ்முக விசை கூம்பிலுள்ள திரவத்தின் நிறையால் இப்போது அதிகரிக்கப்பட்டுள்ளது. இத்திரவத்தின் தன்னீர்ப்பு s ஆதலால், இதன் நிறை $\frac{1}{3}\pi r_2^2 ysw$ ஆகும்.

ஆகவே இப்போது மொத்தக் கீழ்முக விசை

$$W + \frac{1}{3}\pi r_2^2 ysw$$

ஆகி, இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் புதிய நிறைக்குச் சமமாகும்.

அதாவது, $$W + \frac{1}{3}\pi r_2^2 ysw = \frac{1}{3}\pi r_2^2 yw \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

(i), (ii) இலிருந்து W வை நீக்க,

$$\frac{1}{3}\pi r_1^2 xw + \frac{1}{3}\pi r_2^2 ysw = \frac{1}{3}\pi r_2^2 yw,$$
$$\therefore \quad r_1^2 x + r_2^2 ys = r_2^2 y \ ;$$
$$\therefore \quad s = 1 - \frac{r_1^2 x}{r_2^2 y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}.$$

இயல்பொத்த முக்கோணிகளிலிருந்து

$$\frac{r_1}{x} = \frac{r_2}{y};$$
$$\therefore \quad \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{x^2}{y^2} \quad \text{ஆகி, (iii) தருவது}$$
$$s = 1 - \frac{x^3}{y^3}.$$

உதாரணம் 7. 10 சமீ. ஆரையுள்ள ஒரு கோளவடிவான பனிக்கட்டித் திரட்டினுள் (தன்
னீர்ப்பு 0·918) ஒரு இரும்புத் துண்டு (தன்னீர்ப்பு 7·8) பதிக்கப்பட்டு அதன் கனவளவின் $\frac{1}{20}$
பங்கு நீர்ப்பரப்புக்கு மேலிருக்குமாறு நீரில் மிதக்கும். இரும்பின் கனவளவைக் காண்க.

அதன் வடிவு கோளமாகவே இருக்குமாறு பனிக்கட்டி மெதுவாய் உருகுமாயின் கோளம்
ஆழும்பொழுது அதன் ஆரையைக் காண்க. *(Inter. Sc.)*

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் கனவளவு $=\frac{19}{20}\times$ கோளத்தின் கனவளவு

$$=\frac{19}{20}\times\frac{4}{3}\pi(10)^3 \text{ கன சமீ.};$$

$\therefore$ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை $=\frac{19}{20}\cdot\frac{4}{3}\pi(10)^3$ கிராம் நிறை ;

ஏனெனின், 1 கன சமீ. நீர் 1 கிராம் நிறை உள்ளது.

இரும்பின் கனவளவு V கன சமீ. ஆயின் பனிக்கட்டியின் கனவளவு $\frac{4}{3}\pi(10)^3-\text{V}$ கன சமீ. ஆதலால்,

$$\text{இரும்பின் நிறை} = \text{V}\ (7{\cdot}8) \text{ கிராம் நிறை},$$

$$\text{பனிக்கட்டியின் நிறை} = [\tfrac{4}{3}\pi(10)^3-\text{V}](0{\cdot}918) \text{ கிராம் நிறை}.$$

இரும்பின் நிறை+பனிக்கட்டியின் நிறை=இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை. ஆதலால்,

$$7{\cdot}8\text{V}+0{\cdot}918\ [\tfrac{4}{3}\pi(10)^3-\text{V}]=\tfrac{19}{20}\cdot\tfrac{4}{3}\pi(10)^3 \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

$$\therefore\ \text{V} = 19{\cdot}5 \text{ கன சமீ.}$$

அதன் ஆரை r சமீ. ஆகுமிடத்து கோளம் ஆழுமாயின்

$$\text{இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை} = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \text{ கிராம் நிறை},$$

$$\text{இரும்பின் நிறை} = 7{\cdot}8\times19{\cdot}5 \text{ கிராம் நிறை},$$

$$\text{பனிக்கட்டியின் நிறை} = (\tfrac{4}{3}\pi r^3-19{\cdot}5)\ (0{\cdot}918) \text{ கிராம் நிறை}.$$

இரும்பின் நிறை + பனிக்கட்டியின் நிறை = இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை என்றே இங்கும் நாம் பெறவேண்டியதால்

$$7{\cdot}8\times19{\cdot}5+(\tfrac{4}{3}\pi r^3-19{\cdot}5)(0{\cdot}918)=\tfrac{4}{3}\pi r^3,$$

அல்லது $$\tfrac{4}{3}\pi r^3(1-0{\cdot}918)=7{\cdot}8\times19{\cdot}5+0{\cdot}918\times19{\cdot}5$$

$$\therefore\ r=7{\cdot}3 \text{ சமீ.}$$

உதாரணம் 8. வெளி ஆரை a ஆயும் உள்ளாரை b யாயும் உள்ள ஒரு பொள்ளுருளை திறந்த உச்சியையும் c என்னுந் தடிப்புள்ள அடியையும் உடையது. அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகி h என்னும் ஆழம் உள்ளாழ்த்தப்படுமாறு அது நீரில் மிதக்கும். உருளையில் ஒரு சிறு பொசிவு ஏற்படுமாயின் அதன் உயரம் $(a^2h-b^2c)\ /\ (a^2-b^2)$ என்பதிலும் பெரிதாகுமிடத்து அது ஒருபோதும் ஆழாது எனக் காட்டுக. *(H. S. C.)*

அச்சின் h ஆழம் உள்ளாழ்த்தப்பட்டு உருளை மிதக்குமாயின்

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் கனவளவு$=\pi a^2h$;

$\therefore$ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை$=\pi a^2hw$,

இங்கு w ஆனது அலகுக் கனவளவு நீரின் நிறை.

உருளையின் சடம் s தன்னீர்ப்பு உடையதாகி உருளையின் உயரம் H ஆயின்,

$$\text{உருளையின் கனவளவு} = \pi a^2\text{H}-\pi b^2(\text{H}-c)$$

$$=\pi[\text{H}(a^2-b^2)+b^2c];$$

$$\text{உருளையின் நிறை} = \pi[\text{H}(a^2-b^2)+b^2c]sw.$$

ஆகவே, உருளை மிதக்குமிடத்து,

$$\pi\,[\mathrm{H}\,(a^2-b^2)+b^2c]\,sw=\pi a^2hw,$$

அல்லது,

$$s=\frac{a^2h}{\mathrm{H}\,(a^2-b^2)+b^2c}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}.$$

உருளையிற் பொசிவு ஏற்படுமிடத்து அது ஆழாதிருத்தற்கு உருளையின் நிறை $<$ உருளையில் நீர் நிரப்பியிருக்குமிடத்து பெறப்படும் மேலுதைப்பு ;

அதாவது,

உருளையின் நிறை $<$ உருளையின் முழுச் சடத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை ;

அதாவது

$$\pi\,[\mathrm{H}\,(a^2-b^2)+b^2c]\,sw<\pi\,[\mathrm{H}\,(a^2-b^2)+b^2c]\,w,$$

அதாவது

$$s<1$$

(i) இலிருந்து $s<1$ ஆதற்கு

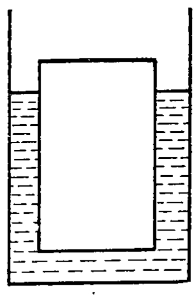
$$\mathrm{H}\,(a^2-b^2)+b^2c>a^2h,$$

அதாவது

$$\mathrm{H}>\frac{a^2h-b^2c}{a^2-b^2}.$$

55. மீயுந்தல் விசை

மீயுந்தல் விசையின் பருமன் " இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறைக்குச் " சமமாகுமென ஏற்கனவே கண்டுள்ளோம். ஆனால், இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவம் என்பதைப்பற்றிச் சற்றுக் கூடுதலாகச் சிந்திக்கவேண்டும். படம் 103 ஐப் பார்க்க. அது ஒரு திரவத்தில் மிதக்கும் ஓர் உருளையைக் குறிக்கும். இத் திரவம் சற்றே பெரிதான விட்டமுள்ள ஓர் உருளைப் பாண்டத்திற் கொள்ளப்படும். இடம்பெயர்க்கப்படககூடிய திரவத்தின் கனவளவு இங்குள்ள முழுத் திரவத்தின் கனவளவிலும் பெரிதாகலாம் என்பது படத்திலிருந்து தெளிவாகும். ஆகவே இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை இங்கு உள்ள மொத்தத் திரவ நிறையிலும் பெரிதாகலாம். 'இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை' என்பதாற் கருதப்பட வேண்டியது என்னவெனில், மிதக்கும் உடலினது உள்ளாழ்த்தப்பட்ட பாகம் இடங்கொண்ட வெளியை நிரப்பும் திரவத்தின் நிறை என்பதே.



படம் 103

உதாரணம். 6 அங்குல உள்விட்டமுள்ள ஓர் உருளைப்பாண்டம் $\frac{1}{4}$ அங். உயரமுள்ள நீர் நிரலைக் கொள்ளும். $5\frac{3}{4}$ அங்குல விட்டமும் 6 அங்குல உயரமும் $\frac{1}{3}$ தன்னீர்ப்பும் உள்ள ஒரு திண்ம மர உருளை பாண்டத்திற்குள் தாழ்த்தப்படும். அது மிதக்குமா அல்லது பாண்டத்தின் அடியைத் தொடுமா ?

$$\text{மர உருளையின் கனவளவு} = \pi\left(\frac{5\frac{3}{4}}{2}\right)^2 \times 6 \text{ கன அங். ;}$$

$$\therefore \text{ மர உருளையின் நிறை} = \pi(\tfrac{23}{8})^2 \times 6 \times \tfrac{1}{3}\, w = 16{\cdot}5\,\pi w,$$

இங்கு, w = ஒரு கன அங்குல நீரின் நிறை.

$$\text{பாண்டத்திலுள்ள நீரின் நிறை} = \pi . 3^2 . \tfrac{1}{4} \text{ கன அங்.}$$
$$= \tfrac{9}{4}\pi \text{ கன அங்.}$$

மர உருளை பாண்டத்தின் அடியைத் தொடுமென உத்தேசிக்குமிடத்து நீர் எழும் உயரம் h ஆயின், நீரின் கனவளவு மாறாது இருத்தலால்,

$$\pi\left\{3^2 - \left(\frac{5\frac{3}{4}}{2}\right)^2\right\} h = \tfrac{9}{4}\pi \text{ , எனப் பெறுவோம்.}$$

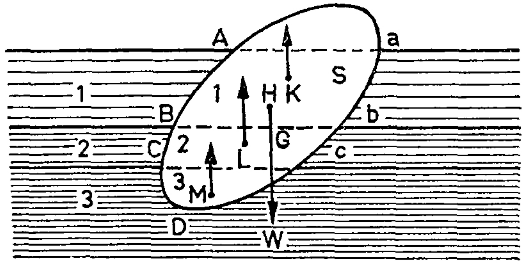
$$\therefore\ h = \tfrac{9}{4} / \{(\tfrac{24}{8})^2 - (\tfrac{23}{8})^2\}$$
$$= \tfrac{9}{4} \times \tfrac{64}{47}.$$
$$= \tfrac{144}{47}.$$

இடம்பெயர்க்கப்படவேண்டிய நீரின் நிறை

$$= \pi\,(\tfrac{23}{8})^2 . \tfrac{144}{47}\, w$$
$$= 25{\cdot}3\,\pi w.$$

இது மர உருளையின் நிறையிலும் பெரிதாகும்.

ஆகவே உருளை மிதக்கும்.



படம் 104

56. ஒன்றோடு ஒன்று கலவாத பல திரவங்களிற் சுயாதீனமாய் மிதக்கும் ஓர் உடலின் சமநிலை நிபந்தனைகள்

S (படம் 104) ஆனது Aa, Bb, Cc என்னுங் இடைத் தளங்களால் வரைப்புற்ற 1, 2, 3,.... என்னும பல வேறுவேறான திரவங் களில் பகுதியாய் உள்ளாழ்த்தப்பட்டு மிதக்கும் யாதும் ஒரு திண்ம மாகுக. திண்மம் S நீக்கப்பட்டு ABba எனனும் வெளி 1 எனனுந் திரவத்தால் நிரப்பபபடுமெனவும், BCcb எனனும் வெளி 2 என்னுந் திரவத்தால் நிரப்பப்படுமெனவும், CDc என்னும் வெளி 3 எனனுந் திரவத்தால் நிரப்பப்படுமெனவும், வேறும் இவவாறே எனவும் உத்தே சித்தலால் சமநிலை பாதிக்கப்படாது என்பது முன்னுள்ள ஆராய்வுகளில் உள்ளதுபோல் தெளிவாகும். இவ்வெளிகளை நிரப்புந் திரவங்கள் திண்மத்தால் **இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவங்களாகும்.** இவற்றின் முறையான புவியீர்ப்பு மையங்களுக்கூடாக நிலைக்குததாய்த் தாக்கும். இவற்றின் நிறைகளின் விளையுளே S இல திரவத்தின் விளையுள் மேல்முக உதைப் பாகும். ஆகவே சமநிலைக்கு, **திண்மத்தின் நிறையானது இடம்பெயர்க்கப்பட்ட வேறுவேறான திரவங்களினது நிறைகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாக வேண்டும்.**

இவ்வகையில் **மீயுந்தல் மையம்** இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கூட்டததின் புவியீர்ப்பு மையமாகும். இப் புள்ளியும திண்மத்தின புவியீர்ப்பு மையமும் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டிற கிடக்க வேண்டும.

உதாரணம் 1. **13·6 தன்னீர்ப்புள்ள இரசத்தின் மேல் நீர் வார்க்கப்படும். மூன்றிலொரு பாகம் நீருக்கு மேலாகவும் மூன்றிலொரு பாகம் நீரில் உள்ளாழ்த்தப்பட்டும் எஞ்சிய மூன்றிலொரு பாகம் இரசத்தில் உள்ளாழ்த்தப்பட்டும் இருக்குமாறு மிதக்கும் உடலின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.**

இங்கு இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் கனவளவும் இரசத்தின் கனவளவும் சமமாகி அவற்றின் அடர்த்திகள் $1 : 13{\cdot}6$ என்னும் விகிதத்திலிருக்கும்.

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை w ஆகுக.

ஆயின், இடம்பெயர்க்கப்பட்ட இரசத்தின் நிறை $13{\cdot}6\ w$ ஆகும். திண்மம் சமநிலையில் மிதத்தலால்

திண்மத்தின் நிறை = இடம்பெயர்க்கப்பட்ட இரசத்தின் நிறை + இடம் பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை

$$= 13{\cdot}6\ w + w = 14{\cdot}6\ w.$$

மறுபடியும், திண்மத்தினுடைய கனவளவின் மூன்றில் ஒரு பாகம் நீரில் ஆழ்த்தப்பட்டுள்ளது.

∴ திண்மத்தின் கனளளவு = இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீர்க் கனவளவின் மும்மடங்கு.

∴ சம கனவளவுள்ள நீரின் நிறை $= 3\ w$;

வேண்டிய திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பு

$$= \frac{\text{திண்மத்தின் நிறை}}{\text{சம கனவளவுள்ள நீரின் நிறை}} = \frac{14{\cdot}6w}{3w} = \frac{14{\cdot}6}{3} = 4{\cdot}86.$$

உதாரணம் 2. **2·575 தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு கூம்பு பகுதியாய் நீரிலும் பகுதியாய் இரசத்திலும் உள்ளாழ்த்தப்படும். அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாயும் உச்சி கீழ்முகமாயும் இருக்குமென எடுத்துக்கொண்டு (i) அதன் கனவளவின் (ii) அதன் அச்சின் யாது பின்னம் இரசத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படுமெனக் காணல்.**

(i) V ஆனது கூம்பின் கனவளவும், x ஆனது இரசத்தின் கீழ் ஆழ்த்தப்பட்ட பாகத்தின் கனவளவும் ஆகுக.

ஆயின் கூம்பு, இடம்பெயர்க்கப்பட்ட இரசம், இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீர் ஆகியவற்றின நிறைகள் $2{\cdot}575V$, $13{\cdot}6x$, $V-x$ என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமாகும்.

சமநிலைககு, முன்னது பின்னுள்ள இரு நிறைகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாக வேண்டும்.

$$\therefore\ 2{\cdot}575\ V = 13{\cdot}6x + V - x\ ;$$

$\therefore\ 12{\cdot}6\ x = 1{\cdot}575\ V$, அல்லது $x = {\cdot}125\ V = \frac{1}{8}V$.

ஆகவே கனவளவின் $\frac{1}{8}$ பங்கு இரசத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படும்.

(ii) இப்பாகம் தொடககக் கூம்பைப்போல் அதே உச்சிக் கோணமுள்ள ஒரு கூம்பாகும். **அத்தகைக் கூம்புகளின் கனவளவுகள் அவற்றின் உயரங்களின் முப்படிகளுக்கு விகிதசமமாகும்** எனபது தெரியப்படும.

ஆகவே அச்சின் $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ பங்கு அல்லது $\frac{1}{2}$ பங்கு இரசத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படும்.

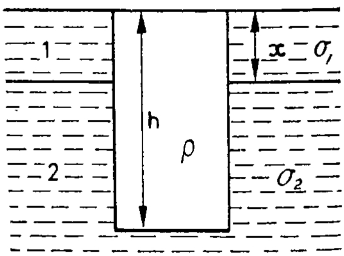
உதாரனம் 3. **ஒன்றோடொன்று கலவாத σ_1, σ_2 $(\sigma_2 > \sigma_1)$ அடர்த்திகள் உள்ள இரு திரவங்களைக் கொள்ளும் ஒரு பாண்டத்தில் h உயரமும் ρ அடர்த்தியுமுள்ள ஓர் உருளை தனது அச்சு நிலைக்குத்தாக மட்டாய் உள்ளாழ்த்தப்பட்டு மிதக்குமாயின் மேலுள்ள திரவப்படையின் தடிப்பைக் காண்க.**

படம் 105 உருளையைக் குறிக்குமாயின், σ_1 அடர்த்தியுள்ள திரவம மேலுள்ள திரவமாகும். இத்திரவப் படையின் தடிப்பு x ஆகுக. ஆயின், உருளையின் நிறை = இடம்பெயர்க்கப்பட்ட (1) ஆம் திரவத்தின நிறை + இடம்பெயர்க்கப்பட்ட (2) ஆம் திரவத்தின் நிறை,

அதாவது

$$\pi r^2 h\rho = \pi r^2 x\sigma_1 + \pi r^2 (h-x)\sigma_2,$$

இங்கு r ஆனது உருளையின் குறுக்கு வெட்டு ஆரை.



படம் 105

$$\therefore\ h\rho = x\sigma_1 + (h-x)\sigma_2.$$

$$x(\sigma_2 - \sigma_1) = h(\sigma_2 - \rho)\ ;$$

$$\therefore\ x = \frac{h(\sigma_2 - \rho)}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

இதுவே திரவத்தினது மேற்படையின் தடிப்பு.

57. உடலானது ஒரு திரவத்திற் பகுதியாய் உள்ளாழ்த்தப்படுமிடத்து இடம்பெயர்க்கப்பட்ட வளிக்குரிய திருத்தம்

இவ்வதிகாரத்தில் திரவங்களில் உள்ளாழ்த்தப்பட்டு மிதக்கும் உடல்களின் சமநிலையைப்பற்றி அவாவியுள்ளோம். ஆனால் நாம் எடுத்து நோக்கிய கொள்கை பெதுவாகப் பாயிகளுக்கு உண்மையாகும். ஆகவே § 56 ஆனது பகுதியாய்த் திரவத்திலும் பகுதியாய் வாயுவிலும் உள்ளாழ்த் தப்பட்டு மிதக்கும் உடலுக்கும் உண்மையாகும்.

ஆகவே, கூடிய செம்மையாய்க் கூறின், ஓர் உடல் திறந்த பாண்டத் திலுள்ள திரவத்தில் பகுதியாய் உள்ளாழ்த்தப்பட்டு மிதக்குமிடத்து அதன் ஒரு பாகம் வளியில் உள்ளாழ்த்தப்படுதலால்,

உடலின் நிறை = இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை
+ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட வளியின் நிறை.

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட வளியின் நிறை பொதுவாக சம்பந்தப்பட்ட மற்றை நிறைகளோடு ஒப்பிடப்படுமிடத்து மிகச் சிறிதாதலால் (§ 54 இன் உதாரணங்களிலுள்ளதுபோல்) அது பலமுறையும் விலக்கப்படும் ; ஆனால் இதனால் ஒரு சிறு செம்மையின்மை ஏற்படும் என்பதைக் கவனிக்க வேண்டியது முக்கியமாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட வகையில் இத்திருத்தம் யாது வித்தியாசத்தை ஆக்குமென்பதை அறிதற்கு இடம்பெயர்ககப்பட்ட வளியின் நிறையை அனுமதித்துக்கொண்டு § 54 இன் உதாரணம் 1 ஐ மறுபடியும் செய்வோம்.

உதாரணம். 4 அடி நீளமுள்ள ஒரு திண்ம மர உருளை, அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக 3 அடி ஆழத்திற்கு உள்ளாழ்த்தப்பட்டு நீரில் மிதக்கும். வளியின் தன்னீர்ப்பு 0·0013 எனக் கொண்டு மரத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க.

நாம் பெறுவது,

உருளையின் நிறை = இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை + இடம்பெயர்க் கப்பட்ட வளியின் நிறை.

s என்பது மரத்தின் தன்னீர்ப்பு என எடுத்துக்கொண்டு §54 இன் உதாரணம் 1 இற்பெற்ற இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறையையும் உருளை யின் நிறையையும் பிரயோகிக்க,

$$\pi r^2.4.s.62\tfrac{1}{2} = \pi r^2.3.62\tfrac{1}{2} + \text{இடம்பெயர்க்கப்பட்ட வளியின் நிறை.}$$

$$= \pi r^2.3.62\tfrac{1}{2} + \pi r^2.1.(0{\cdot}0013)\,62\tfrac{1}{2},$$

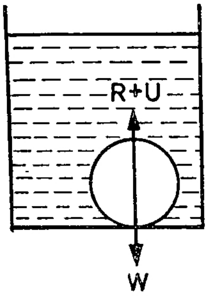
$$\therefore\ 4s = 3 + 0{\cdot}0013\,;$$

$$\therefore\ s = 0{\cdot}750325\,;$$

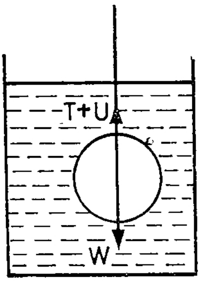
குறிப்பிட்ட உதாரணத்திற பெற்ற $s = 0{\cdot}75$ என்னும் பெறுமானத் திலும் இது வேறாகும்.

58. கீழ் ஆழ்த்தப்பட்ட ஒரு உடலின் சமநிலை

W வானது கீழ் ஆழ்த்தப்பட்ட ஓர் உடலின் நிறையையும், U ஆனது (இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறைக்குச் சமமும் எதிருமான) மேல் உதைப்பையும், அல்லது மீயுந்தல் விசையையும், குறிக்குமாயின் வெளிப்படையாக



படம். 106



படம் 107

(i) $W > U$ ஆயின், கொள்ளும் பாண்டத்தின் அடியில் ஓய்விலிருக்கும்வரை உடல் ஆழும். பாண்டம் உடலில் R என்னும் மேன் முகமான மறுதாக்கத்தை உஞற்றுமாயின உடல் சமநிலையில் இருத்தலால் (படம் 106),

$$R+U=W$$ எனப் பெறுவோம்.

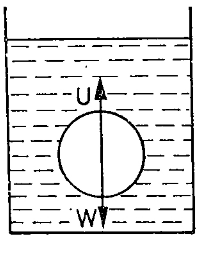
$$\therefore R=W-U.$$

வேறு மாதிரியாக, ஓர் இழையாலே தாங்கப்பட்டு ஒரு கீழ் ஆழ்த்திய நிலையில் உடல் சமநிலையில் இருக்கலாம். இழையில் இழுவை T ஆயின் சமநிலை பெறுதற்கு (படம் 107)

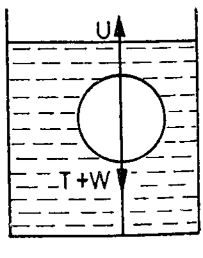
$$T+U=W;$$

$$\therefore T=W-U.$$

(ii) $W=U$ ஆயின உடல் முற்றாய்க் கீழ ஆழத்தப்படுமிடத்து (படம் 108) எந் நிலையிலும் அது ஓய்விலிருக்கும்.



படம் 108



படம் 109

(iii) $W < U$ ஆயின் குறைக்கப்பட்ட மேலுதைப்பானது W என்பதைச் செப்பமாய்ச் சமப்படுத்தும் நிலையிலே பரப்பில் மிதக்கும்வரை உடலானது எழும். வேறுமாதிரியாக, உடல முற்றாயக் கீழ் ஆழ்த்தப்படுமாறு விகாரப்படுத்தலால சமநிலை பெறப்படலாம். ஓர் இழை உடலுக்கும் பாண்டத்தின் அடிக்கும் தொடுக்கப்படுமாயின் (படம் 109) இழையின் இழுவை (T)

$$T+W=U$$

ஆகுமாறு இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore T=U-W.$$

உதாரணம் 1. 5 சமீ. நீளமாகும் ஓரங்களுள்ள ஒரு பொன் சதுரமுகி (தன்னீர்ப்பு 19·35) ஒவ்வொரு பக்கத்தின் 4 சமீ. கீழ் ஆழ்த்தப்படுமாறு இரசத்தில் தொங்கவிடப்படும். தாங்கும் இழையின் இழுவையைக் காண்க.

சதுரமுகியின் கனவளவு $= 5 \times 5 \times 5$ கன சமீ. $= 125$ கன சமீ.

$\therefore$ சதுரமுகியின் நிறை $= 125 \times 19{\cdot}35$ கிராம் $= 2418{\cdot}75$ கிராம்.

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட இரசத்தின் கனவளவு $= 5 \times 5 \times 4$ கன சமீ.

$= 100$ கன சமீ.

$\therefore$ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட இரசத்தின் நிறை $= 100 \times 13{\cdot}6 = 1360$ கிராம்.

$\therefore$ இழையின் வேண்டிய இழுவை $= 2418{\cdot}75 - 1360$ கிராம்

$= 1058\frac{3}{4}$ கிராம் நிறை.

உதாரணம் 2. இழுவை 1 கிகி. இற்கு ஒடுக்கப்படுமாயின், சதுரமுகி எவ்வளவு தூரம் ஆழும் எனக் காணல்.

இங்கு கூடுதலாக இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை இழுவைக் குறைவுக்கு, அல்லது $58\frac{3}{4}$ கிராம என்பதற்குச், சமமாகும்வரை சதுரமுகி ஆழும்.

$\therefore$ கூடுலாக இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கனவளவு $= 58{\cdot}75 \div 13{\cdot}6$ கன சமீ.

$= 4{\cdot}32$ கன சமீ.

ஆனல் சதுரமுகியினது அடியின் பரப்பளவு $= 25$ சதுர சமீ.

$\therefore$ உள்ளாழ்த்தப்பட்ட ஆழத்தின் அதிகரிப்பு $= 4{\cdot}32 \times 25$ சமீ

$= 0{\cdot}1728$ சமீ $- 1{\cdot}728$மிமீ.

உதாரணம் 3. தன் அச்சின் அரைப்பங்கு நீளத்தை நீரில் ஆழ்த்தற்கு 13 கிராம் நிறை தேவைப்படும் உருளைக் கிடேச்சின் (தன்னீர்ப்பு 0·24) நிறையைக் காண்க.

உருளையின் கனவளவு $2v$ கன சமீ. ஆகுக.

ஆயின, இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் கனவளவு $= v$ கன சமீ ;

$\therefore$ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை $= v$ கிராம் ;

உருளையின் நிறை $= 2v \times 0{\cdot}24$ கிராம் $= 0{\cdot}48v$ கிராம்.

ஆகவே உருளையின் சமநிலையிலிருந்து

$$0{\cdot}48v + 13 = v \ ;$$

$\therefore$ $0{\cdot}52v = 13$, அல்லது $v = 25$ கன சமீ.

$\therefore$ கிடேச்சின் நிறை $= 0{\cdot}48v = 12$ கிராம்.

உதாரணம் 4. M திணிவும், ρ_1 அடர்த்தியுமுள்ள ஒரு திண்மக் கோளம், $\rho_2\ (>\rho_1)$ என்னும் அடர்த்தியுள்ள திரவப் பரப்பின்கீழ் கோளத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலும் திரவத்தைக் கொண்ட பாண்டத்தின் அடியிலுந் தொடுக்கப்பட்ட ஓர் இழையாற் கட்டப்படும். இழையின் இழுவையைக் காண்க.

$\rho_2 = 3\rho_1$ ஆவதோடு, திரவம் பாண்டத்திலிருந்து மெதுவாய் வெளிப்பாயுமாயின், கோளத்தின் அரைப் பாகம் பரப்பின் மேல் இருக்குமிடத்து இழுவை முன்னுள்ள பெறுமானத்தின் காற்பங்குக்கு ஒடுங்குமெனை நிறுவுக. (*Inter. Sc.*)

கோளத்தின் திணிவு M இரு. எனவும், அதன் அடர்த்தி கன அடிக்கு ρ_1 இரு. எனவும் எடுத்துக்கொள்ளுமிடத்து கோளத்தின் ஆரை r அடி ஆயின்,

$$\text{கோளத்தின் கனவளவு} = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \text{ கன அடி};$$

$$\therefore \text{கோளத்தின் திணிவு} = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 \text{ இரு.}$$

$$= \text{M இரு.};$$

$$\therefore\ \text{M} = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \rho_1.$$

ஆகவே $\quad$ கோளத்தின் நிறை $= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1$ இரு. நிறை.

ஆனால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை $= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_2$ இரு. நிறை.

$$= \frac{\text{M}\rho_2}{\rho_1}.$$

இழையின் இழுவை T இரு. நிறை ஆயின்,

இழையின் இழுவை + கோளத்தின் நிறை = இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை.

$$\therefore\ \text{T} + \text{M} = \frac{\text{M}\rho_2}{\rho_1};$$

$$\therefore\ \text{T} = \frac{\text{M}(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1} \text{ இரு. நிறை.}$$

அல்லது $\quad \text{T} = \dfrac{\text{M}g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}$ இருத்தலி.

$\rho_2 = 3\rho_1$ ஆயின் இது 2Mg இருத்தலி ஆகும்.

கோளத்தின் அரைப் பங்கு பரப்பின் மேலிருக்குமிடத்து

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை $= \frac{1}{2}.\frac{\text{M}\rho_2}{\rho_1}$ இரு. நிறை எனப் பெறுவோம். புதிய இழுவை T′ இரு. நிறை ஆயின்,

$$\text{T}' + \text{M} = \tfrac{1}{2}\frac{\text{M}\rho_2}{\rho_1}$$

$$= \tfrac{3}{2}\text{M},\ \rho_2 = 3\rho_1 \text{ ஆதலால்.}$$

$$\therefore\ \text{T}' = \tfrac{1}{2}\text{M இரு. நிறை.}$$

$$= \tfrac{1}{2}\text{M}g \text{ இருத்தலி};$$

இது முன்னுள்ள பெறுமானத்தின் காற்பங்கு (2Mg இருத்தலி).

59. உள்ளாழ்த்தப்பட்ட திண்மங்களால் அமுக்கத்தில் ஏற்படும் விளைவு

திரவம்கொண்ட ஒரு பாண்டத்தில் திண்மங்கள் தாழ்த்தப்படுமாயின் இத்திண்மங்களால் ஆக்கப்படும் இடப்பெயர்ச்சியால் திரவத்தின் மட்டம்எழும் ஆகவே பாண்டத்தின் பரப்பு முழுவதிலும் அமுக்க அதிகரிப்பு உண்டாகும்.

ஒரு பாரமான திரவததின் யாதும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள அமுக்கமானது ஆழம், அடர்த்தி, என்பனவற்றையே சாருமாதலால் ; பாண்டத்தின் பக் கங்களிலும் அடியிலும் உள்ள அமுக்கம், இத்திண்மங்களுக்குப் பதிலாக அவை இடம்பெயரச் செய்யும் தொகைக்குச் சமமான திரவத்தைப் பிரதி வைத்தலால் ஆகும் அதே அமுக்கமாகும்.

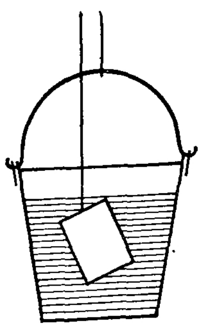
உதாரணம் 1. ஒரு கயிற்ருல் தொங்கவிடப்பட்ட நீர் கொண்ட ஒரு வாளியை எடுத்து நோக்குக. யாதும் ஓர் உடல்–ஒரு செங்கல் என்க– இவ்வாளிக்குள் வேறொரு கயிற்ருலே தாழ்த்தப்படுக. (படம் 110) வாளியுள் நீர் எழும், ஆகவே, வாளி முழுவதிலும் அமுக்க அதிகரிப்பு உண்டாகும். முதலாவது கயிறு கூடுதலான விளையுள் உதைப்பைத் தாங்கவேண்டியதால் அதன் இழுவை முன்னுள்ளதிலும் பெரிதாகும்.

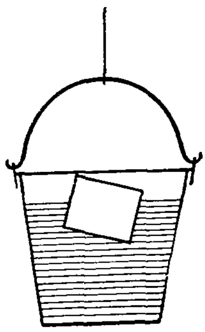
இவ்வகையில், வாளியைத் தாங்கும் கயிற்றின் இழுவை
= வாளியின் நிறை + அதனில் உண்மையிற் கொள்ளப்படும் நீரின் நிறை + செங்கல் இடம்பெயரச் செய்த நீரின் நிறை.
அன்றியும்,

செங்கல்லைத் தாங்கும் கயிற்றின் இழுவை
= செங்கல்லின் நிறை – செங்கல் இடம்பெயரச் செய்த நீரின் நிறை.
∴ இரு கயிறுகளிலும் உள்ள மொத்த இழுவை
= வாளியின் நிறை + நீரின் உண்மையான நிறை + செங்கல்லின் நிறை.

இரு கயிறுகளும் வாளியையும் நீரையும் செங்கல்லையுந் தாங்கவேண்டிய படியால் இது வெளிப் படையாக உண்மையாக வேண்டும்.

உதாரணம் 2. செங்கல் லுக்குப் பதிலாக வாளிக்குள் நீரிலும் இலேசான ஓர் உடலை— ஒரு மரத்துண்டு என்க—மிதக் குமாறு வைக்கப்படுமாயின் (படம் 111), அது தன நிறைக்குச் சமமான நிறை யுடைய நீரை இடம்பெயர்க்கச் செய்யும். முன்னர்போல,


படம் 110


படம் 111

தாங்கும் கயிற்றில் இழுவை

=வாளியின் நிறை + உண்மையிற் கொள்ளப்படும் நீரின் நிறை + மரம் இடம்பெயரச் செய்த நீரின் நிறை.

=வாளியின் நிறை + கொள்ளப்படும் நீரின் நிறை + மரத்தின் நிறை.

கயிறு வாளியையும், நீரையும், மரத்தையுந் தாங்கவேண்டியதால் இது வெளிப்படையாக உண்மையாகவேண்டும்.

உதாரணம் 3. நீர் கொண்ட ஒரு வாளி ஓர் ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஒரு கயிற்றினுல் தொங்கவிடப்படுகின்றது. அது, கயிற்றின் மற்ற முனையில் W_1 என்னும் நிறையினுல் சமப்படுத்தப்படும். W_2 நிறையும், σ தன்னீர்ப்பும் உள்ள ஒரு மரத்துண்டு நீரில் முற்றும் உள்ளாழ்த்தப்படுமாறு, ஓர் இழையினுல் வாளியின் அடிக்குக் கட்டப்படும். பின்னர் நிகழும் இயக்கத்தில், மரத்திற்குத் தொடுக்கப்பட்ட இழையில் இழுவை

$$\frac{2W_1W_2}{2W_1+W_2}\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\right)$$

என நிறுவுக. *(Inter. Sc.)*

வாளியில் W_2 நிறையுள்ள மரத்துண்டு கட்டப்படுமிடத்து, கப்பியின் இப்பக்கத்தில் W_1+W_2 என்னும் மொத்த நிறையைப் பெறுவோம்; மற்றைப் பக்கத்தில் W_1 நிறையே உண்டு. ஆகவே, வாளி f என்னும் ஆர்முடுகலோடு கீழ்முகமாக இயங்குமாயின்,

$$f=\frac{W_2g}{2W_1+W_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}.$$

(*Tutorial Dynamics*, § 213 ஐப் பார்க்க).

மரத்துண்டை வாளிக்குத் தொடுக்கும் இழையின் இழுவை T இரு. நிறையும், திரவத்தால் மரத்துண்டில் உஞற்றப்படும் விளையுள் மேல்முக உதைப்பு V இரு. நிறையும் ஆயின், மரத்திலே தாக்கும் விசைகளாவன.

(1) கீழ்முகமாகத் தாக்கும் T, W_2 எனபன.

(2) மேல்முகமாகத் தாக்கும் V என்பது.

இம்மரத்துண்டும் f ஆர்முடுகலோடு கீழ்முகமாக இயங்குதலால் (வாளியினதும் உள்ளுறையினதும் ஒரு பாகமாதலால்) மரத்துண்டுகுரிய இயக்கச் சமன்பாடு

$$(T+W_2-V)g=W_2f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}.$$

மரத்துண்டின் நிறை W_2 இரு. நிறை ஆகி அதன் தன்னீர்ப்பு σ ஆதலால் சம கனவளவு கொண்ட நீரின் நிறை $\frac{W_2}{\sigma}$ இரு. நிறை ஆகும். மரத்திற்குப் பதிலாக இச்சம கனவளவு நீர் பிரதிவைக்கப்படுமாயின், இந் நீரின் நிறை V என்னும் மேலுதைப்போடு ஒருங்கு சேர்ந்து இந்நீர்த் திணிவுக்கு f ஆர்முடுகலைக் கீழ்முகமாகக் கொடுக்கும் ; ஆகவே

$$\left(\frac{W_2}{\sigma}-V\right)g=\frac{W_2}{\sigma}f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}.$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து T என்பதை நாம் காணவேண்டும். (ii) இலிருந்து (iii) ஐக் கழிக்க,

$$\left(T+W_2-\frac{W_2}{\sigma}\right)g=W_2 f\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\text{ ; எனப் பெறுவோம்.}$$

$$\therefore\ Tg=W_2\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)(f-g)$$

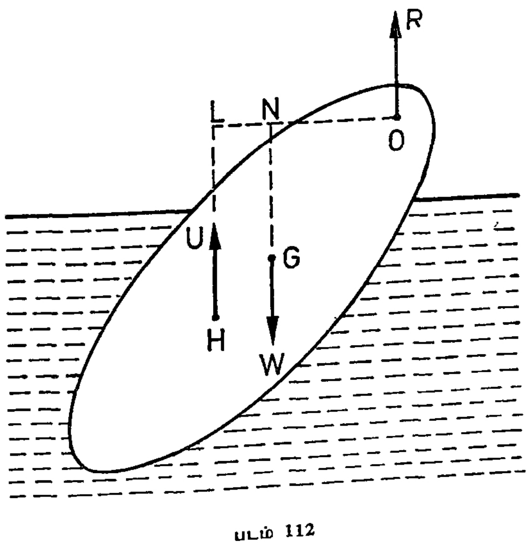
$$=W_2\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\cdot\left(\frac{-2W_1 g}{2W_1+W_2}\right),\text{ (i) இலிருந்து}$$

$$=\frac{2W_1W_2 g}{2W_1+W_2}\left(\frac{1}{\sigma}-1\right);$$

$$\therefore\ T=\frac{2W_1W_2}{2W_1+W_2}\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\right).$$

60. விகாரப்படுத்தப்பட்டு மிதக்கும் உடல்களின் சமநிலை

ஓர் உடல், சுயாதீனமின்றி, ஆனால் ஒரு புள்ளி நிலையாக்கப்பட்டு ஒரு திரவத்தில் மிதக்குமாயின இவ்வுடலைச் சமநிலையில் வைத்தற்கு விசைகளுக்கும் அவற்றின் தாக்கக் கோடுகளுககும் இருக்கவேண்டிய தொடர்பை நாம் எளிதில் உறுதியாக்கலாம்.



படம் 112

O என்னும் நிலைத்த புள்ளிபற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பத்தக்க உடலைப் படம் 112 குறிக்க. G உடலின் புவியீர்பபு மையமாகும் ; H, இடம்பெயர்ந்த திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையமாகும் (அதாவது, மீயுந்தல்மையம்).

உடலிலே தாக்கும் விசைகளை எடுத்து நோக்குக. உடலில் விளையுள் கிடை விசை யாதுமில்லை (§ 52 ஐப் பார்க்க). உடலிலே தாக்கும் விசைகளாவன,

(1) உடலின் புவியீர்ப்பு மையம் (G) இற்கூடாக நிலைக்குத்தாய்க் கீழ்முகமாகத் தாக்கும் உடலின் நிறை (W),

(2) மீயுந்தல மையம் (H) இற்கூடாக மேன்முகமாக நிலைக்குத்தாய்த் தாக்கும் மீயுந்தல் விசை (அல்லது மேலுதைப்பு) U,

(3) O என்னும் நிலைத்த புள்ளியில் தாங்கியால் உஞற்றப்படும் மறுதாக்கம் (R),

என்பனவே.

W, U என்பனவற்றின் தாக்கக் கோடுகளை முறையே N, L என்பனவற்றிற் சந்திக்குமாறு O விற்கூடாக ஒரு கிடைக் கோட்டை வரைக. U, W என்பன நிலைக்குத்தாய்த் தாக்கலால், சமநிலையைப் பெறுதற்கு R என்பதும் நிலைக்குத்தாய்த தாக்கி இவ்விசைகளின் பருமன்கள்

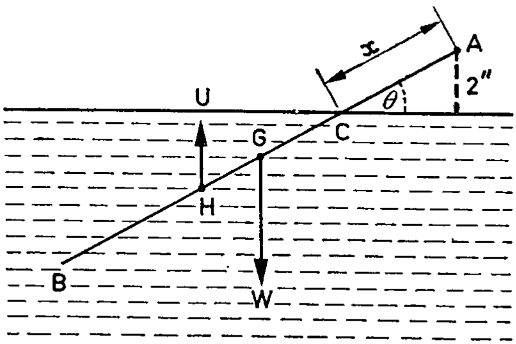
$$R+U=W$$

ஆகுமாறு இருக்கவேண்டும்.

அன்றியும், இவ்விசைகள் எல்லாம் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்திற் கிடக்க வேண்டும் ; O பற்றி W இன் திருப்பம் O பற்றி U வின் திருப்பத்தைச் சமபபடுத்த வேண்டும் ; அதாவது,

$$W \times ON = U \times OL$$

O, G, H என்பன ஒரே நிலைக்குததுக் கோட்டிற் கிடக்குமிடத்து ஒரு குறிப்பிட்ட வகை பெறப்படும்.



படம் 113

உதாரனம் 1. ஒரு அடி நீளமுள்ள சீரான பாரக் கோல் ஒன்று நீரிற் பகுதியாய் ஆழ்த்தப்பட்டு, நீர்ப்பரப்பின்மேல் 2 அங்குல உயரத்தில் தனது முனை ஒன்றிற்கூடாக நிலையாக்கப்பட்ட

ஒரு இடையான அச்சைச் சுற்றிச் சுயாதீனமாக அசையும். சமநிலைத் தானத்தைக் கண்டு, இந்நிலை சரிவானதாயின் கோலின் தன்னீர்ப்பு $\frac{35}{36}$ என்பதிலுங் குறைவாக வேண்டுமெனக் காட்டுக.

AB, (படம் 113) கோலைக் குறிக்க. A, நிலைத்த முனையும்; C, கோல் நீர்ப்பரப்பைச் சந்திக்கும் புள்ளியும் ஆகுக. $AD = x$ அங். ஆயின், $BC = 12 - x$ அங்குலமாகும். கோல் சீரானதால் G என்னும் அதன் நடுப்புள்ளி அதன் புவியீர்ப்பு மையமாகும்.

$$\therefore \quad AG = 6 \text{ அங்.}$$

BC யின் நடுப்புள்ளியாகிய H, இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் புவியீர்ப்பு மையமாகும்.

$$\therefore \quad CH = \tfrac{1}{2}\,(12 - x) \text{ அங்.}$$

கோலின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு a சதுர அங்குலமும், அதன் தன்னீர்ப்பு s என்பதுமாயின்,

$$\text{கோலின் கனவளவு} = 12a \text{ கன அங்.}$$

$$\therefore \quad \text{கோலின் நிறை} = 12asw \text{ இரு. நிறை ;}$$

இங்கு w = இருத்தலில் 1 கன அங்குல நீரின் நிறையாகும்.

$$\therefore \quad W = 12asw \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i).}$$

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் கனவளவு கோலின் உள்ளாழ்த்தப்பட்ட பாகமாகிய BC யின் கனவளவாகும்.

$$\therefore \quad \text{இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் கனவளவு} = (12 - x)\,a \text{ கன அங். ;}$$

$$\therefore \quad \text{இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை} = (12 - x)\;aw \text{ இரு. நிறை.}$$

$$\therefore \quad U = (12 - x)\;aw \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

கோல் இடையோடு θ கோணத்தை ஆக்குமாயின், A பற்றித் திருப்பங்கள் எடுக்க,

$$W \times AG \text{ கோசை } \theta = U \times AH \text{ கோசை } \theta, \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

$$\therefore \quad W \times AG = U \times AH \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

ஆனால் $AG = 6$ அங., $AH = x + \frac{1}{2}\,(12 - x) = \frac{1}{2}(12 + x)$ அங.;

$\therefore$ (iii) தருவது

$$6W = \tfrac{1}{2}\,(12 + x)\;U\;;$$

அல்லது W, U என்பனவற்றிற்குப் பிரதியிட,

$$6.12asw = \tfrac{1}{2}\;(12 + x)\;(12 - x)\;aw,$$

அதவாது
$$144\,s = 144 - x^2\;;$$

$$\therefore \quad x^2 = 144 - 144\;s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iv) ;}$$

இது, உள்ளாழ்த்தப்படாத கோலின் நீளத்தை அக்கோலினது தன்னீர்ப்பின் சார்பாய்த் தரும்.

சரிவு நிலையிற் சமநிலையைப் பெறுதற்கு AC ஆனது 2 அங். இலும் பெரிதாக வேண்டும் ; அதாவது $x > 2$;

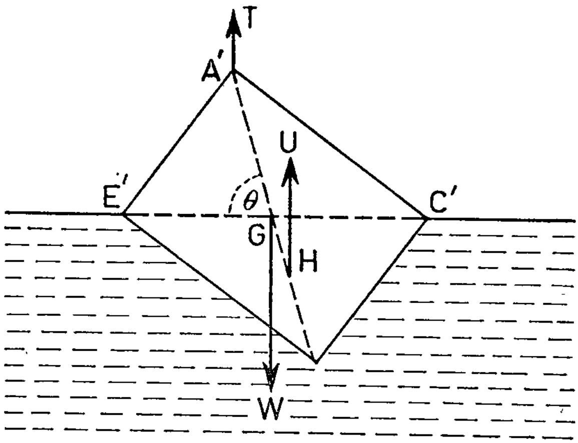
$$\therefore \quad x^2 > 4 ;$$

$$\therefore \quad 144 - 144\ s > 4, \quad \text{(iv) இலிருந்து} ;$$

$$\therefore \quad 144\, s < 140 ;$$

$$\therefore \quad s < \tfrac{35}{36}.$$

உதாரணம் 2. ABCD, ABEF என்பன நீரில் மிதக்கும் W நிறையுள்ள ஒரு சீரான செங்கோண மரத்துண்டின் கிடை முகமும் நிலைக்குத்து முகமும் ஆகும். AB அதன் ஒரு மேற் கிடை ஓரம். AB யின் நடுப்புள்ளியில் ஒரு கயிறு கட்டப்பட்டு, CD நீர்ப்பரப்பிலிருக்கும் வரை இழுக்கப்பட EF என்பதும் பரப்பிலிருக்கக் காணப்படும். மரத்தின் தன்னீர்ப்பு $\frac{2}{3}$ என நிறுவி கயிற்றின் இழுவையையும் காண்க. (*Inter. Sc.*)



படம் 114

CD, EF ஆகிய இரண்டும் பரப்பிலிருக்குமிடத்து மரத்துண்டின் கிடை ஓரங்களின் நடுப்புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்து வெட்டைப் படம் 114 குறிக்க ; அதாவது, A′, C′, E′ என்பன முறையே AB,CD,EF என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகும். G மரத்துண்டின் புவியீர்ப்பு மையமாகும. ஆகையால் இது இந்நடு வெட்டின் விட்டங்களினது வெட்டுப் புள்ளியில் இருத்தல் வேண்டும். H மீயுநதல் மையமாகும். இடம் பெயர்க்கப்பட்ட நீர் ஒரு முககோணி அரியத்தின் வடிவததை உடையது என்னும் உண்மையிலிருந்து H இன் நிலை துணியப்படலாம் ; H இவ்வரியததின் புவியீர்ப்பு மையமாகி

$$GH = \tfrac{1}{3} \times \text{அரைவிட்டம்} ;$$

$$= \tfrac{1}{3}\, A'G.$$

ஆகுமாறுள்ளது.

$$\therefore \quad A'H = \tfrac{4}{3} A'G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i).$$

T ஆனது A′ இற்குத் தொடுககப்படும் கயிற்றின் இழுவையும் U ஆனது மீயுந்தல் விசையுமாயின்

$$T + U = W \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii),$$

A′ பற்றித் திருப்பங்கள் எடுக்க,

$$W \times A'G \text{ கோசை}\theta = U \times A'H \text{ கோசை}\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (iii);$$

இங்கு θ வானது A′G நிலையோடு ஆக்குங் கோணமாகும்.

அரை மரத்துண்டின் நிறை $\frac{1}{2}$ W ஆதலால், உள்ளாழ்த்தப்பட்ட அரைத் துண்டால் இடம்பெயரச் செய்த நீரின் நிறை $\frac{1}{2}\frac{W}{\sigma}$ ஆகும்; இங்கு σ ஆனது மரத்தின் தன்னீர்ப்பு.

ஆகவே,
$$U = \frac{W}{2\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iv).$$

(i) இலிருந்து A′H இன பெறுமானததை (iii) இற் பிரதியிட்டு கோசை θ என்பதை வெட்ட,

$$W \times A'G = U \times \tfrac{4}{3} A'G \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

$$\therefore \quad W = \tfrac{4}{3} U$$

$$= \tfrac{4}{3} \cdot \frac{W}{2\sigma}, \quad \text{(iv) இலிருந்து;}$$

$$\therefore \quad 6\sigma = 4.$$

$$\therefore \quad \sigma = \tfrac{2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (v).$$

(ii) இலிருந்து

$$T = W - U$$

$$= W - \frac{W}{2\sigma}, \quad \text{(iv) இலிருநது}$$

$$= W - \frac{3W}{4} \quad \text{(v) இலிருந்து}$$

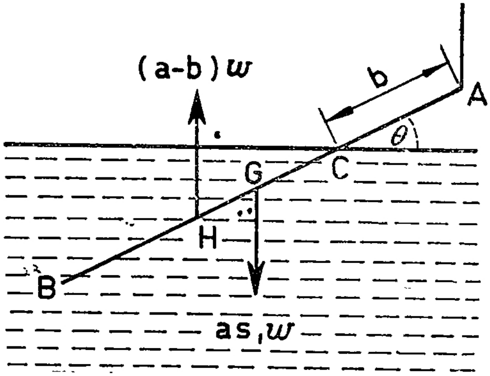
$$= \tfrac{1}{4} W.$$

உதாரணம் 3. a நீளமும், s_1 (< 1) தன்னீர்ப்புமுள்ள AB என்னும் ஒரு மெல்லிய சீரான கோல், A யிலே தொடுக்கப்பட்ட ஒரு இழையினுல் தொங்கவிடப்படும். முனை B நீரில் உள்ளாழ்த்தப்படுமிடத்து கோலின் b என்னும் நீளம் நீருக்கு வெளியேயிருக்கும்; s_2 என்னுந் தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் உள்ளாழ்த்தப்படுமிடத்து கோலின் c என்னும் நீளம் திரவத்திற்கு வெளியேயிருக்கும்.

$$s_1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad s_2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$$

என நிறுவுக. (*Inter. Sc.*)

படம் 115 ஐப் பார்க்க. கோல் நீரின் பரப்பை வெட்டும் புள்ளி C ஆகும். எனின் $AC = b$ ஆகும். G கோலின் புவியீர்ப்பு மையமாகும் ; அதாவது $AG = \frac{1}{2}a$. H ஆனது மீயுந்தல் மையமாகும்.



படம் 115

எனின், $$CH = \tfrac{1}{2}BC = \tfrac{1}{2}(a-b) ;$$
$$\therefore \quad AH = b + \tfrac{1}{2}(a-b).$$
$$= \tfrac{1}{2}(a+b).$$

கோலின் அலகு நீளத்தால் இடப்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை w ஆயின், கோலின் நிறை $= as_1w$ ஆவதோடு, மீயுந்தல் விசை $= (a-b)\,w$ ஆகும்.

A பற்றித் திருப்பங்கள் எடுக்க,

$as_1w \times AG$ கோசை$\theta = (a-b)\,w \times AH$ கோசைθ ; இங்கு θ வானது கோல் கிடையோடு ஆக்குங் கோணமாகும்.

$$\therefore \quad as_1 \times AG = (a-b) \times AH,$$

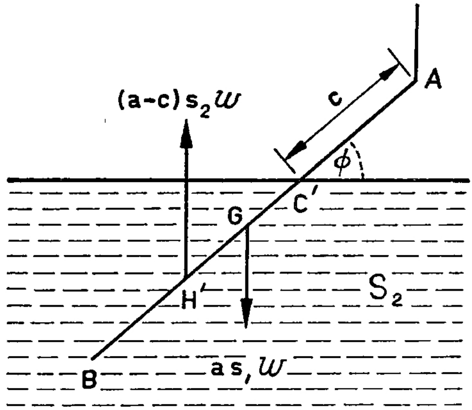
அதாவது $$as_1 . \tfrac{1}{2}a = (a-b) . \tfrac{1}{2}(a+b) ;$$
$$\therefore \quad s_1a^2 = a^2 - b^2 ;$$
$$\therefore \quad s_1 = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

s_2 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் உள்ளாழ்த்தப்பட்ட கோலைப் படம் 116 குறிக்க. இப்போது கோல் கிடையோடு ϕ எனனும் கோணத்தை ஆக்கு மெனவும் கோல் திரவத்தின பரப்பை வெட்டும் புள்ளி C′ எனவும் உத்தேசிக்க. H′ புதிய மீயுந்தல் மையமாயின், $C'H' = \frac{1}{2}BC' = \frac{1}{2}(a-c)$ ஆகும்.

ஆதலால்,

$$AH' = C + \tfrac{1}{2}(a-c) = \tfrac{1}{2}(a+c).$$

முன்போல, $AG = \frac{1}{2}a$ ஆகி கோலின் நிறை as_1w ஆகும். உள்ளாழ்த் தப்பட்ட கோலின் நீளம் $a-c$ ஆதலால், இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை $(a-c)s_2w$ ஆகும்; இதுவே மீயுந்தல் விசை.



படம் 116

A பற்றித் திருப்பங்கள் எடுக்க,

$$as_1w \times AG \text{ கோசை } \phi = (a-c)\, s_2w \times AH' \text{ கோசை } \phi\,;$$

$$\therefore \quad as_1w \times \tfrac{1}{2}a = (a-c)\, s_2w \times \tfrac{1}{2}(a+c)\,;$$

$$\therefore \quad s_1a^2 = s_2(a^2-c^2)\,;$$

$$\therefore \quad s_2 = \frac{a^2}{a^2-c^2}.\, s_1$$

$$= \frac{a^2}{a^2-c^2}.\, \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

முன்னுள்ள முடிபிலிருந்து,

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}.$$

பயிற்சி VIII

1. 1 அடி நீளமுள்ள ஒரு மெல்லிய மரக் கோல் 2 அங்குலம் பரப்பின்மேல் இருக்குமாறு நிலைக்குத்தாய் நீரில் மிதககும். மரத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணக.

2. ஒரு மிதவை 24 இரு. நிறை உள்ளது. கன அடிக்கு 64 இரு. நிறை உள்ள கடல் நீரில அது தன் கனவளவின் $\frac{3}{4}$ பஙகு உள்ளாழ்த்தப்படுமாறு மிதக்குமாயின், அதன் கன வளவு யாது ?

3. s தன்னீர்ப்புள்ள கிடேச்சால் ஆக்கப்பட்ட W இரு. நிறையுள்ள உயிர் காப்பு மிதவையின் மீயுந்தல்

$$w\left(\frac{1}{s}-1\right) \text{ இரு. நிறை}$$

என நிறுவுக.

4. ஒரு கப்பல (தன்னீர்ப்பு 1·024 ஆகும்) கடல் நீரிலிருந்து தூய நீருககுச் செல்லுகிறது. அது நீரில எழுமா அலலது கூடுதலாக ஆழுமா?

கப்பலின் நிறை W தொன்னும், நீர்க் கோட்டுவெட்டின் பரப்பளவு (மாறல் வீச்சில் மாறிலியெனக் கொளளபபடும்) A சதுர அடியுமாயின், நீர்க் கோடு எவ்வளவால் அரக்குமீ.

(1 கனஅடி தூயநீரின் நிறை 62·5 இருததலாகும்.)

5000 தொன நிறையுளள கப்பலுககு நீர்க கோடு ஆறு அங்குலத்திற்குமேல் அரகக லாகாதெனின, நீர்க்கோட்டு வெட்டு 8400 சதுர அடியிலும் கூடிய பரப்பளவு உடைய தாக வேண்டுமெனக் காட்டுக.

5. 250 கன சமீ. கனவளவு உளள ஒரு மரததுண்டு (தன்னீர்ப்பு 0·75), 1·25 தன்னீர்ப் புளள ஒரு திரவததைக கொண்ட பாண்டத்தின் அடியிலே தொடுககப்பட்ட இழையால் இத்திரவத்தில முற்றும் உளளாழ்த்தப்படும். இழையின் இழுவையைக் காணக.

6. நீரைக கொணட ஒரு பாணடம் தராசின் ஒரு தட்டில் வைக்கப்பட்டு நிறைகளால் எதிர் நிறுததப்படும். ஒரு மனிதன் பாண்டத்தின் பக்கஙகளைத் தொடாது தன் கையை நீருக் குள் வைக்கிறன். சமநிலை குழப்பபபடுமா? உங்கள் காரணங்களைக் கூறுக.

7. சீரான குறுககுவெட்டுளள ஓர உருளை, D தன்னீர்ப்புள்ள பதார்த்தத்தின் L என்னும நீளததாலும், d தன்னீர்ப்புளள வேறொரு பதார்த்தத்தின் l என்னும் நீளத்தாலும் ஆககப்பட்டு நீரில் மிதக்கும். எவவளவால் கீழாழ்த்தப்படுமெனத் துணிக.

8. 2 அடி நீளமும், W நிறையும் உள்ள ஒரு மர உருளை அதன் மூன்று மடங்கு தன் னீர்பபுளள ஒரு பாயியில் தனது அசசு நிலைக்குத்தாக மிதக்கும். சமநிலைத் தானத் திற்கு (i) 2 அங்குலம் மேலாக (ii) 2 அஙகுலம் கீழாக, உருளையை வைத்தற்கு உருளையில யாது விசை பிரயோகிக்கவேண்டும்.

9. 0·6, 0·9 என்னுந் தன்னீரப்புக்கள் உள்ள இரு திரவங்களைக கொண்ட ஒரு பாண்டத் தில் 0·7 என்னுந் தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திணம உருளை முற்றும்க கீழ் ஆழ்த்தப்பட்டு அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக மிதக்கும். அதன் அச்சில எவ்வளவு மேற பாயியிலிருக்கும்.

10. ஒரு சீரான கோலின் அரைப் பங்கு நீரில் உள்ளாழ்த்தபபட்டு ஒரு சரிவான நிலையில் ஒய்விலிருக்குமீ. நீரின் கீழ் உள்ள முனையிலிருநது அதன் நீளத்தின் $\frac{1}{2}$ பங்கு தூரத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளிபற்றி ஒரு நிலைகுத்துத் தளத்தில அது சுழலக்கூடும். கோலின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க.

11. 63 இரு. நிறையும் 0·6 தன்னீர்ப்பும் உள்ள ஒரு மரத்துண்டு ஒரு குளத்திலுண்டு. 11·5 தன்னீரப்புள்ள ஓர ஈயக்குண்டு இரணடு இழையால் மரததோடு தொடுக்கப்படுமா யின் மரத்தை முற்றும் நீரின கீழ வைத்தற்குக் குண்டுககு வேணடிய மிகச் சிறிய நிறை யைக் காண்க.

12. நீரில மிதக்கும் ஒரு மரச் சதுரமுகி 480 அவுன்சு நிறை ஒன்றைத் தாங்குகிறது. இந் நிறை நீக்கப்படுமிடத்து அது 1 அங்குலம் எழும். சதுரமுகியின் பருமனைக் காண்க.

13. W நிறையுள்ள ஒரு செங்கூம்பு அதன் அச்சின் $\frac{1}{3}$ பங்கு உள்ளாழ்த்தப்பட்டு உச்சி கீழ்முகமாக ஒரு திரவத்தில் மிதக்கும். அதனை திரவத்தில் சற்றே முற்றாய் ஆழ்த்தற்கு அதன் அடியில் யாது கூடுதலான நிறை இடப்பட வேண்டும்.

14. W நிறையுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான கோலின் கீழ் முனையில், புறக் கணிக்கத்தக்க கனவளவுள்ள P என்னும் நிறை தொடுக்கப்படுமிடத்து, அதன் அச்சின் $\frac{1}{8}$ பங்கு வெளியே இருக்குமாறு ஒரு சாய்ந்த நிலையில நீரில் மிதக்கும். 7P = W எனக் காட்டுக.

15. ஒரு மர உருளை அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக அதன் நீளத்தின் $\frac{3}{4}$ பங்கு உள்ளாழ்த்தப் பட்டு நீரில் மிதக்கும். நீரின் அரைப் பங்கு நிறையுள்ள எண்ணெய் மரத்தை மூடுதற் குப் போதிய ஆழத்திற்குப் பாண்டத்தில் வார்க்கப்படும். உருளையின் யாது பங்கு இப் போது நீரில உள்ளாழ்த்தப்படும் ?

16. s தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு உடல், ρ தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தில் முற்றாய் உள் தாழ்த்தப்படும். கீழ்முகமாக அதன் ஆர்முடுகல் $\left(1-\frac{\rho}{s}\right)g$ எனக் காட்டுக.

17. h உயரமும் ρ அடர்த்தியுமுள்ள ஒரு திண்மக் கூம்பு, σ ($>\rho$) அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில் உச்சி மேன் முகமாக மிதக்கும். அதன் அச்சின் யாது பங்கு திரவப் பரப்பின் மேலிருக்கும்.

18. சீரான சடத்தால் ஆக்கப்பட்ட AOB என்னும் முக்கோணிக் குறுக்கு வெட்டுள்ள ஒரு செவ்வரியம், O விற்கூடாகச் செல்லும் ஓரம் நீர்ப் பரப்பிலும், OB யைக் கொள்ளும் முகம் நீருக்கு வெளியிலும் இருக்குமாறு நீரில மிதக்கும். AB யைக் கொள்ளும் முகம் நிலைக்குத்தாகுமென நிறுவுக.

OA = 4 சமீ., AB = 5 சமீ. ஆயும், AOB என்னுங் கோணம் ஒரு செங்கோண முகமா யின் அரியச் சடத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க ? *(H. S. C., I.)*

19. 0·8 தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு சதுரமுகி, சதுர அடி கொண்ட செங்கோண நீர் தாங்கியில் ஓய்விலிருக்கும். சதுரமுகியின் ஓர் ஓரம் 15 அங்குலமும் சதுரத்தின் இரு பக்கம் 16 அங்குலமுமாகும். சதுரமுகியை மிதக்கச் செய்தற்கு மட்டுமட்டாக நீர் வார்க்கப்படும். நீரின் கனவளவைச் சதுரமுகியின் கனவளவோடு ஒப்பிடுக.

20. நீரில் ஆழ்த்தப்பட்ட AB என்னும் ஒரு சீரான மெல்லிய கோல் நீர்ப் பரப்பின்மேல் $\frac{1}{2}$ AB உயரத்தில் நிலையாக்கப்பட்ட A என்னும் முனைபற்றிச் சுயாதீனமாய்த் திரும்பும். 0·36 என்னுந் தன்னீர்ப்புள்ள மரத்தால இக்கோல் ஆக்கப்படுமாயின் சரியாகச் சமநிலை கொள்ளுமிடத்து கோலின் யாது பின்னம் நீரின் கீழ இருக்குமெனக் காண்க. *(H. S. C., I.)*

21. ஒரு ஏகவினமான திண்மக் கூம்பு, தன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் உச்சி மிக மேலாக வும், தன் அடர்த்திக்கு 125 : 61 என்னும் விகிதம கொள்ளும் அடர்த்தியுள்ள திரவத் தில் மிதக்கும். அச்சின் யாது பாகம் உள்ளாழ்த்தப்படும் ?

22. நீர் கொண்டதும், நிலைக்குத்து அச்சு உள்ளதுமான ஓர் உருளைப் பாண்டத்தில, அதன் அடியிலே தொடுக்கப்பட்ட T என்னும் இழுவை கொண்ட இழையால் ஒரு திண்மம் முற்றாய் உள்ளாழ்த்தப்படுமாறு பிடிக்கப்படும். இழையை வெட்ட திண்மம் நீரில் மிதந்தபடி ஓய்விற்கு வருகிறது. நீர்ப்பரப்பு $T/\pi r^2 w$ என்னுந் தூரத்தால் விழு மென நிறுவுக. இங்கு, r பாண்டத்தின் ஆரையும், w அலகுக் கனவளவு நீரின் நிறையும் ஆகும். *(Inter. Sc.)*

8—R 19640 (12/66)

23. கடலிலிருந்து தூய நீருக்குச் செலலும் ஒரு கப்பல் m அஙகுலம் ஆழும் ; P தொன் சரக்குகள் இறக்கப்பட்ட பின்னர் அது n அங்குலம் எழும். நீர்க்கோட்டிற்கு அண்மை யில் கப்பலின் பக்கங்கள் நிலைக்குத்தெனவும், கடல் நீரின் தன்னீர்ப்பு 1·026 எனவும் எடுததுக் கொண்டு, தொடக்கத்திற் கப்பல் சரக்கு ஆகியவற்றின் நிறை $513mP/(13n)$ என நிறுவுக.

24. பகுதியாய்க் கட்டிச் செம்பாலும் (தன்னீர்ப்பு 8·8) பகுதியாய்க் கட்டி ஈயத்தாலும் (தன்னீர்ப்பு 11·4) ஆககப்பட்ட ஒரு திணிவு, அதன் கனவளவின் $\frac{2}{3}$ பங்கு இரசத்தில் (தன்னீர்ப்பு 13·6) உள்ளாழ்த்தப்படும், எஞ்சிய $\frac{1}{3}$ பங்கு நீரில உள்ளாழ்த்தப்பட்டும் மிதக்கும. திணிவிலுள்ள செம்பு, ஈயம், ஆகியவற்றின் கனவளவுகளையும் நிறைகளை யும் ஒப்பிடுக.

25. ρ அடர்த்தியுளள ஒரு மெலலிய கோலின் ஒரு முனையில், கோல் நிறையின் $\frac{1}{n}$ பங்கு நிறையுளள ஒரு சிறிய உலோகத் துண்டு தொடுக்கப்படும். $\frac{\sigma}{\rho}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ ஆயின், σ அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தில் இக்கோல் எச்சாய்விலும் மிதக்குமென நிறுவுக.

26. 0·5 தன்னீர்ப்புள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான கோல் நீரில் மிதக்கும ; முனை A யிற் கட்டிய ஓர் இழையால் A யானது நீர்ப்பரப்பின்மேல கோலின் காற் பங்கு நீளத் திற்கு உயர்த்தப்படும். கோல் ஓய்வில் இருக்கும் நிலையைக் காண்க.

27. ஒரு நூலிலே தொஙகும் ஒரு திணம உடல் மூன்று திரவங்களில் பின்னடுத்துக் கீழ் ஆழ்த்தபபடும். முதலாவது திரவத்திலிருந்து இரணடாவது திரவத்திற்கு மாறுகையில் நூலில் இழுவை குறைதலுறும் ; இரண்டாவது திரவத்திலிருந்து மூன்ருவது திரவத திற்கு மாறுகையில் நூலில இழுவை அதே அளவு குறையும். திரவங்களின் தன் னீாபபுககளுககிடையே உள்ள தொடாபைக் காணக.

28. ஒரு வளைதகு நாண் நீாபபரப்பின மேல் நிலைத்த ஒரு கப்பியின் மேற் செல்லும். நாணின் ஒரு முனை கையிற் பிடிககபபட மற்றையது பகுதியாய் உள்ளாழத்தப்பட்டதும் $2a$ நீளமும் s தனனீாபபுமுளளதுமான ஒரு சீரான மரக்கம்பின் ஒரு முனைக்குத் தொடுககபபடும. நாண் எம்மாதிரி இழுக்கபபட்ட போதிலும், ஒரு குறித்த நிலையை அடையும் வரை கமபின உள்ளாழ்ததபபட்ட பாகத்தின நீளம் மாறிலியாகுமெனக் காட்டுக.

29. வளியின் அடாததி முறையே σ_1, σ_2, σ_3 ஆகுமிடத்து, ஒரு திரவததில் மிதக்கும் ஓர் உடலானது பரப்பினமேல V_1, V_2, V_3 என்னும் கனவளவுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

$$\frac{\sigma_2-\sigma_3}{V_1}+\frac{\sigma_3-\sigma_1}{V_2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{V_3}=0$$

என நிறுவுக. (*H. S. C. I.*)

30. s அடர்ததியுளள ஒரு தகடு s_1, s_2 எனனும் அடர்த்திகளுளள திரவங்களைக் கொணட ஒரு பாண்டததில முறறுய உளளாழததப்படும். s ஆனது s_1, s_2 என்பன வற்றிற்கிடையே கிடககுமாயின, வேருக்கற் பரப்பு தகட்டின் தடிப்பை என்ன விகிதத் தில பிரிக்குமெனக காண்க. h தகட்டின் தடிப்பும், மேலே உள்ள பாயியின் ஆழமு மாயின் ; தகடு பகுதியாய உளளாழ்த்தப்பட்டு மிதத்தற்கு என்ன நிபந்தனை நிறை வேற்றபபட வேணடும

31. செவ்வட்டக் கூம்பு வடிவம் கொண்ட ஒரு மிதவையின் உச்சி, கடலின் அடியோடு ஒரு சங்கிலியாலே தொடுக்கப்படும். வற்றற் காலத்தில் சங்கிலி தளர்ந்திருக்க கூம்பின் அச்சு நிலைக்குத்தாகி அதன் $\frac{2}{3}$ பங்கு உள்ளாழ்த்தப்பட்டு அது மிதக்கும். அடியின் விட்டம் 9 அடியும், உயரம் 12 அடியுமாயின், நீரின் நிறை கன அடிக்கு 64 இருத்த லெனவும் சங்கிலியின் நிறை புறக்கணிக்கப்படலாமெனவும் எடுத்துக் கொண்டு மிதவை யின் நிறையைக் கணிகக.

அன்றியும், பெருக்குக் காலத்தில் மிதவை முற்றுய் உள்ளாழ்த்தப்படுமிடத்து சங்கிலி யின் இழுவையைக் கணிக்க. (*Inter. Eng.*)

32. $\frac{2}{3}$ தன்னீாப்புள்ள ஒரு திண்ம மர அரைக் கோளத்தின் அடியில் அதே மரத்தால் ஒரு திண்மச் செங்கூம்பு அமைகக்ப்படும்; இரண்டு அடிகளும் முற்றுய்ப பொருந்தும். r அரைக் கோளத்தின ஆரையும், $2r$ கூம்பின் உயரமும் ஆகி, கூட்டு உடல் கூம்பின அச்சு நிலைக்குததாகுமாறு நீரில மிதக்குமாயின் அரைக் கோளப் பரப்பு முற்றுய்க் கீழ் ஆழ்த்தபபடுமா, அலலது பகுதியாயக் கீழ் ஆழ்த்தப்படுமா ? நிலையைக் கணிக்க.

33. σ (<1) தன்னீர்ப்புளள சட்டததால் ஆக்கப்பட்டுச் சிறிய குறுக்கு வெட்டும், a நீளமும் W நிறையும் கொண்ட ஒரு சீரான நோக் கோல, ஒரு நிலைகுத்துத தளத்திற் சுயா தீனமாய்த் திரும்புமாறு a என்பதிலும் பெரிய ஆழமுள்ள பாணடத்தின அடியிற் சுயாதீனமாய்ப் பிணைகபபடும். தொடக்கத்தில கோல் கிடையாய் அடியில் ஓய்விலிருக்க, நீர் மெலல உளளே வார்ககபபடும். நீரின ஆழம் அதிகரிக்க, உள்ளாழ்த்தப்பட்ட கோலின் நீளமாறறததையும் பிணையலின் மறுதாக்கத்தையும் ஆராய்க; உங்கள் முடிபுகளை வரைபு முறையில் எடுத்துக காட்டுக.

கோல் கிடையோடு ஒரு கூாஙகோணச சாய்வைக கொளளுமிடத்து, λ தனனீர்ப் புளள சடத்தால் ஆககப்படும் வேறொரு மெலலிய சீரான கோல இதே மாதிரி பாண் டத்தின் அடியிற் சுயாதினமாய்ப் பிணைக்கப்பட்டுக் கிடையோடு இதே கோணச் சாய்வைக் கொள்ளுமாயின் இரணடாவது கோலின் நீளததைக காண்க. (*H. S. C., III.*)

34. C நடுப்புள்ளியாகுமாறு, ACB என்னும அரைவட்ட வில் ஒன்றை வரைக; அது நிறையின்றிய அரைக்கோளக கிண்ணத்தைக் குறிக்க. C யில ஒரு துணிககை பொரு த்தப்பட்டு சம பாரமான ஒரு துணிககை A யில் பொருத்தப்படும். கிண்ணம் நீரில் மிதக்குமிடத்து A யானது நீாப்பரப்புக்குச சற்றுககிடட வருவது காணப்படும; இப்போது A யிலிருநது துணிக்கை விலக்கப்பட்டுக கிணணததிற்குள் இடப்படுமாயின் நீாப் பரப்பின் மேல AB யின் உயரததைக் காண்க.

35. அரைப் பங்கு நீரால் நிரப்பப்பட்ட ஒரு வாளி, ஓா ஒபபமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இழையிலே தொங்கும். இழையின் மறற முனை வாளிக்குள் விழச் செய்வதற்கு கப்பி போதிய அளவு சிறிதாகும. இமமுனையில் 2 இலும் பாரக்கக்கூடிய தன்னீாபபுடைய ஒரு குணடு கட்டப்படும். குண்டு வாளியின் அடியைத் தொடாமலும் நீர் வெளிப்பாயாமலும் இருக்குமாயின் சமநிலையைப் பேணுதற்கு குணடின் நிறை $sW/(s-2)$ எனபதற்குச் சமமாக வேண்டுமெனக் காட்டுக. இங்கு W, வாளியினதும் நீரினதும் மொத்த நிறை ஆகும.

36. அச்சு நிலைகுத்தாயும் உச்சி கீழ்முகமாயும் உளள ஒரு திண்மக் கூம்பு நீரில் மிதக்கிறது. அச்சின் $\frac{3}{4}$ பஙகு உளளாழ்ததப்படுமாறு அதனை ஆழச் செய்தற்கு அதன் அடியில் 50 கிராம சுமை வேண்டும். அச்சின $\frac{4}{5}$ பஙகு உள்ளாழ்த்தப்படுமாறு செய்தற்கு 96 கிராம் சுமை வேண்டும். உடலின் தன்னீர்ப்பு ஏறக்குறைய 0·324 எனக் காட்டுக.

37. σ_1, σ_2 $(\sigma_1 < \sigma_2)$ என்னுந தன்னீர்ப்புக்கள உள்ள ஒன்றுேடொன்று கலவாத இரு திரவஙகளின வேருககற் பரப்பின்மேல் h $(< l)$ எனனுந தூரததில உள்ள ஒரு முனைபற்றி l நீளமும் ρ தன்னீர்ப்பும் உளள ஒரு சீரான கோல் சுயாதீனமாய்த்

திரும்பும். சுயாதீன முனை கீழ்த் திரவத்திலிருக்கக் கோல் நிலைக்குத்தோடு θ சாய்வில் சமநிலை கொள்ளும்.

$$\text{கோசை}^2\ \theta = \frac{h^2\,(\sigma_2 - \sigma_1)}{l^2\,(\sigma_2 - \rho)} \text{ எனவும்,}$$

$\sigma_1 < \rho < \sigma_2$ எனவும் காட்டுக. (*H. S. C., III.*)

38. ஒரு திரவமும், உள்ளாழ்த்தப்பட்ட ஒரு திணமமும் நிலைக்குத்தாய்க் கீழ்முகமாக f என்னும் பொது ஆர்முடுகலோடு ஒருங்கு அசையுமிடத்து திண்மததில் மேலுதைப்பு

$$W\left(1 - \frac{f}{g}\right)$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு W ஆனது திண்மத்தால் நிரப்பப்படும் வெளியை இடங்கொள்ளுந் திரவத்தின் நிறையாகும்.

நீரைக் கொண்ட ஒரு வாளி, ஒரு நிலையாக்கப்பட்ட ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியா இழையின் ஒரு முனையிலே தொங்கிக்கொண்டு, இழையின் மற்றை முனையில் எதிர்நிறுததப்படும் M திணிவோடு சமநிலையில் இருக்கும். பின்னர் m திணிவும் σ (< 1) தன்னீர்ப்பும் உள்ள ஒரு திண்மம் அதனை முற்றாய் உள்ளாழுமாறு செய்யும் ஓர் இழையால் வாளியின் அடிக்குத் தொடுக்கப்படும். இத் தொகுதி இயங்குமாறு விடப்படின் இரண்டு இழைகளினுமுள்ள இழுவைகளின் விகிதம்

$$(M + m)\ \sigma / m\ (1 - \sigma)$$

எனக் காட்டுக. (H.S.C., III)

39. தந்த நிறையுடைய ஒரு சீரான கூம்பு உச்சி கீழ்முகமாக ஒரு திரவத்தில் மிதக்கும். கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் தான்$^{-1}\,(1/\sqrt{2})$ ஆகுமிடத்து, திரவத்தோடு தொடுகையிலுள்ள கூம்பின் பரப்பு மிகச சிறிதாகுமெனை நிறுவுக.

40. mA என்னுங் கிடைக் குறுககு வெட்டுப் பரப்பளவுள்ள ஒரு சீரான உருளை உடல், அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாய் nA $(n > m)$ என்னுங் கிடைக் குறுக்கு வெட்டுப் பரப் பளவு உள்ள உருளைப் பாண்டத்திற் கொளளப்படும் ρ அடர்த்தி கொண்ட திரவத்திற் பகுதியாய் உள்ளாழ்ததபபட்டு மிதக்கும். ρ' என்னுங் குறைந்த அடர்த்தி கொண்ட ஒரு திரவத்தின் pAa என்னுங் கனவளவு மென்மையாயப் பாண்டத்துள் வார்க்கப் படும். இரு திரவங்களும் ஒன்றோடொன்று கலவா. உடல் இரு திரவங்களினும் பகுதியாய உளளாழ்த்தப்பட்டு மிதக்குமாயின், உடல் பாண்டத்தில் எழும் உயரம் $\frac{p}{n} \cdot \frac{\rho'}{\rho}\, a$ என நிறுவுக. (*H. S. C., I.*)

விடை

1. $\frac{5}{6}$.
2. $\frac{1}{2}$ கன அடி.
4. ஆழும், $0{\cdot}84$ M/A அடி.
5. 125 கிராம் நிறை.
6. ஆம். பாண்டம் கொணட தராசுத் தட்டு இறங்கும் ; ஏனெனின் நீர்மட்டம் உயர்த்தப்படு தலால் அடியில் அமுக்கம் அதிகரிககும்.
7. $ld + LD$.
8. $(a)\ \frac{1}{4}$ W ; $(b)\ \frac{1}{4}$ W.
9. $\frac{2}{3}$.
10. $\frac{1}{8}$.

11. 46 இரு. நிறை.

12. பக்கம் 28·8 அங்.

13. 26 W.

15. $\frac{1}{2}$ கனவளவு.

17. $h\left(1-\frac{\rho}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}$.

18. $\frac{16}{25}$.

19. 0·11 : 1.

20. $\frac{1}{5}$.

21. $\frac{1}{5}$.

24. கனவளவுகள் 10 : 3 ;
நிறைகள் 440 : 171.

26. நிலைக்குத்தோடு சைன் $^{-1}\{1/(2\sqrt{2})\}$ என்னுங் கோணத்தில்.

27. $s_1 - 2s_2 + s_3 = 0$.

30. $(s_2 - s) : (s - s_1)$; $d < h(s_2 - s)/(s_2 - s_1)$.

31. 1536 π இரு. நிறை, 3648 π இரு. நிறை.

32. முற்றாய். பொது அடி $2r(1 - \sqrt[3]{2}/3)$ என்னும் ஆழத்தில் இருக்கும்.

33. நீளம் $= a\,(\sigma/\lambda)^{\frac{1}{3}}$.

34. ஆரையின் $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ பங்கு.

அதிகாரம் IX

தன்னீர்ப்பின் செய்முறைத் துணிபு

61. முன்னுரை

இவ்வதிகாரத்தில் திண்மங்கள் திரவங்கள் என்பனவற்றின் தன்னீர்ப்பைத் துணிதற்குப் பல்வேறு செய்முறை முறைகளை எடுத்து நோக்குவோம். ஒரு திரவத்தின் தன்னீர்ப்பு, அதன் தூய்மையின் ஓர் அளவெனப் பலமுறையுங் கொள்ளப்படுதலால், இப்பிரச்சினை வணிகமுறையில் முக்கியமானது. அன்றியும் ஒரு திரவம் நீரால் ஐதாக்கப்படுமிடத்து, ஐதாக்கற்படி கலவையின் தன்னீர்ப்பிலிருந்து அறியப்படலாம்.

எளிய அளவியலாற் கணிக்கக்கூடிய கனவளவுள்ள (**V** கன அடி) ஒரு திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் (s) காணவேண்டுமாயின், அதன் நிறை (**W** இரு. நிறை) தெரியுமிடத்து இத்தன்னீர்ப்பு நேரடியாகப் பெறப்படலாம் ; ஏனெனின், நியம பதார்த்தத்தின (நீர்) 1 கன அடியின் நிறை $= w$, அதாவது $w = 62{\cdot}3$ இரு. நிறை ஆகுமிடத்து, $\mathbf{W} = \mathbf{V}sw$ ஆகும்.

தனனீர்ப்பை நேரடியாகப் பெறமுடியாதாயின், பின்வரும் முறைகளுள் ஒன்றை நாம் பிரயோகிப்போம் :—

(i) தன்னீர்ப்புப் போத்தல் ;
(ii) நீர்நிலையியற்றராசு ;
(iii) நீரமானிகள் ; அல்லது
(iv) **U** – குழாய்.

இவற்றுள் ஒவ்வொன்றையும் வரிசையாய் எடுத்து நோக்குவோம். இவ்வாறு செய்யமுன்னர் தலைமைத் தன்னீர்ப்புக்களின் ஓர் அட்டவணை தருவோம்.

திரவங்கள்

அமிலம் (ஐதரோகுளோரிக்கு)	1·19	ஒலிவ் எண்ணெய் ..	0·92
அமிலம் (நைத்திரிக்கு) ..	1·27	பெற்றல்	0·70
அமிலம் (சல்பூரிக்கு) ..	1·84	கற்பூரத்தைலம் ..	0·88
அற்ககோல் ..	0·83	நீா (தூய) ..	1·00
கிளிசறீன் ..	1·26	நீர் (கடல்) ..	1·08
பால்	1·03		

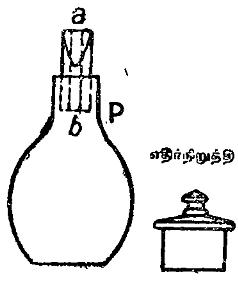
திண்மங்கள்

கன்ஞர்	3·00	பீங்கான்	2·14
செப்புச் சல்பேற்றுப் பளிங்குகள்	2·38	படிகப் பளிங்குகள் ..	2·65
வைரம்	3·50	உப்பு (பொது) ..	1·92
கண்ணுடி	2·50—3·50	சீனி	1·60

		மரம் :	
கருங்கல் ..	2·64	அல்டர் ..	.. 0.54
பனிக்கட்டி ..	0·92	ஆசு ..	.. 0·75
மாக்கல்	2·70	பீச்சு ..	.. 0·85
உலோகங்கள் :		பெட்டி ..	.. 1·04
அலுமினியம் ..	2·65	செடர் ..	.. 0·52
அந்திமணி ..	6·70	செறி ..	.. 0·79
பிசுமது	9·80	கிடேச்சு ..	.. 0·24
பித்தளை	8·40	எபணி ..	.. 1·33
செம்பு	8·88	எல்ம் ..	.. 0·57
பொன்	19·26	மகோகனி	.. 0·90
இரும்பு	7·80	ஓக்கு ..	0·70—0·95
ஈயம்	11·35	பைன் ..	.. 0·53
இரசம்	13·59	பொப்லர் ..	.. 0·38
பிளாற்றினம் ..	21·10	உவில்லோ	.. 0·59
வெள்ளி ..	10·70		
வெள்ளீயம் ..	7·29		
நாகம்	7·20		

62. தன்னீர்ப்புப் போத்தல்

திண்மங்கள், திரவங்கள், ஆகியவற்றின் தன்னீர்ப்புக்களைக் காண்பதற்குத் **தன்னீர்ப்புப் போத்தல்** அதிகமாகப் பிரயோகிக்கப்படும். சம கனவளவுகள் உள்ள வேறுவேருன திரவங்களைச செப்பமாய் நிறுப்பதற்கு அது அமைக்கப்படும். நுண் துளை (ab) ஒன்று துளைக்கப்பட்டதும் இறுக்கமாய்ப் பொருந்தக்கூடியதுமான அடைப்பைக் கொண்ட ஒரு கண்ணுடிக் குடுவையை அது கொண்டிருக்கும் (படம் 117). போத்தலைப் பிரயோகிககையில், நிறுக்கவேண்டிய திரவத்தால் அது முற்ருய் நிரப்பப்பட்ட பின்னர், போத்தலின் கழுத்தில் குறித்த ஒரு குறியை அடையும் வரை அடைப்பு உள்ளே தள்ளப்படும். மிகைமிஞ்சிய திரவம், ab என்னுந் துளைக்கூடாக வெளிப்பாய்ந்து துடைக்கப்படும். ஆகவே போத்தல் இவ்வாறு நிரப்பப்படும் போது என்றும் ஒரே கனவளவுடைய திரவத்தை அது கொளளும்.



படம் 117

ஒவ்வொரு நோக்கலிலும் போத்தலின் நிறையை விலக்குதற்கு போத்தல் நிறைக்குச் செப்பமாய்ச் சமமாகும் ஓர் எதிர்நிறுத்தி இடப்படும். இவ்வெதிர்நிறுத்தி வழக்கமாய்ச் சிறு துண்டுகள் கொண்ட ஒரு சிறிய உலோகப் பெட்டியாகும். அதன் நிறை, குண்டுகளைக் கூட்டுதலால்

அல்லது அகற்றுதலாற் செப்பம் செய்யப்படும். திரவத்தால் நிரப்பப்பட்ட போத்தல் ஒரு தராசுத்தட்டில் இடப்படுமிடத்து, எதிர்நிறுத்தியும், நிறுக்க வழங்கப்படும் நிறைகளும் மற்றைத் தட்டில் இடப்படும். போத்தலின் நிறையை எதிர்நிறுத்தி சமப்படுத்தலால், கூடுதலான நிறைகள் கொள்ளப்படுந் திரவத்தின் நிறையை மாத்திரம் தரும்.

(*a*) **ஒரு தந்த திரவத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.**

செயன்முறை பின்வருமாறு :—

(i) போத்தல் வெறுமையாய் இருக்குமிடத்து அதனை எதிர்நிறுத்தி சமப்படுத்தும்வரை எதிர்நிறுத்தியின் நிறையை (வேண்டுமாயின்) செப்பம் செய்க.

(ii) போத்தலை நீரால் நிரப்பி, அடைப்பைக் கவனமாக இட்டுக்கொண்டு, நிறைகள் கொண்ட தராசுத தட்டில் எதிர்நிறுத்தியை வைத்து நிறுக்க.

(iii) தன்னீர்ப்பு காணவேண்டிய திரவத்தால் நிரப்பிக் கவனமாக அடைப்பை இட்டுக்கொண்டு, மீண்டும் முன்போல நிறுக்க.

இரண்டாவது செய்கை போத்தலிற் கொள்ளப்பட்ட நீரின் நிறையைத் தரும். மூன்றாவது செய்கை சமகனவளவு கொண்ட திரவத்தின் நிறையைத் தரும். பின்னதை முன்னதால் வகுக்கத் திரவத்தின் தன்னீர்ப்புக் காணப்படும்.

எதிர்நிறுத்தி கிடைககாதாயின் வெறும் போத்தலின் நிறை w கிராம் ஆகுக. ஆயின் அது முறையே நீராலும் தந்த திரவத்தாலும் நிரப்பப் படுமிடத்து அதன் நிறைகள் W கிராமும், W' கிராமுமாயின் ;

$$\text{போத்தலிலுள்ள நீரின் நிறை} = W - w,$$

$$\text{சமகனவளவுள்ள திரவத்தின் நிறை} = W' - w\,;$$

$$\therefore \quad \text{திரவத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{W' - w}{W - w}.$$

உதாரணம். வெறுமையாய் இருக்குமிடத்து 7·2 கிராம் நிறையுடைய குடுவை, சல்பூரிக்கமிலத்தால் நிரப்பப்படுமிடத்து 53·45 கிராம் நிறையாகி நீரால் நிரப்பப்படுமிடத்து 32·2 கிராம் நிறையாகும். சல்பூரிக்கமிலத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

$$\text{சல்பூரிக்கமிலத்தின் நிறை} = 53{\cdot}45 - 7{\cdot}2 \text{ கிராம்} = 46{\cdot}25 \text{ கிராம்.}$$

$$\text{சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறை} = 32{\cdot}2 - 7{\cdot}2 \text{ கிராம்} = 25{\cdot}0 \text{ கிராம்.}$$

$$\text{சல்பூரிக்கமிலத்தின் தன்னீர்ப்பு} = 46{\cdot}25 \div 25 \qquad = 1{\cdot}85.$$

(*b*) **நீரிற் கரையாத் திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.**

தன்னீர்ப்புப் போத்தலுக்குட் செல்லுமாறு போதிய அளவு சிறிய துண்டுகளாக ஒரு திண்மம் உடைக்கப்படுமாயின், அதன் தன்னீர்ப்பை நாம் பின்வருமாறு காணலாம் :—

(i) திண்மத்தை நிறுக்க (w கிராம்).

(ii) தன்னீர்ப்புப் போத்தலை நீரால் நிரப்பிக்கொண்டு, அதனையும் திண்மத்தையும் தராசின் ஒரு தட்டில் வைத்து நிறுக்க. இந்நிறை, அதாவது நீர் நிரம்பிய போத்தலின் நிறை + திண்மத்தின் நிறை, W_1 கிராம்.

(iii) திண்மத்தை எடுத்துப் போத்தலுக்குள் இடுக. திண்மத்தின் கனவளவுக்குச் சமமான கனவளவு உள்ள நீர் மேற்பாயும். போத்தலில் உள்ள நீரின் கனவளவு முன்னுள்ளதிலும் பார்க்கத் திண்மத்தின் கனவளவாற் குறைந்திருக்கும். ஆகவே திண்மத்தையும் நீரையுங்கொண்ட போத்தல் மீண்டும் நிறுக்கப்படுமாயின் (W_2 கிராம்), அவற்றின் மொத்த நிறை முன்னுள்ளதிலும் பார்க்க இடம்பெயர்ந்த நீரின் நிறையாற் குறையும்.

அதாவது திண்மத்தின் கனவளவுக்குச் சமனான கனவளவு கொண்ட நீரின் நிறை $= W_1 - W_2$.

$$\text{திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{திண்மத்தின் நிறை}}{\text{சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறை}} = \frac{w}{W_1 - W_2}.$$

இப்பரிசோதனைக்குப் பயன்படுத்தக்கூடிய திண்மங்களாவன மணல், செப்புப்பொடி, மாக்கல், இரும்பு, ஈயம், நாகம், பித்தளை ஆகியவற்றின் துண்டுகள் அல்லது படிகப் பளிங்குகள் என்பனவே.

உதாரணம் 1. ஒரு திண்மத்தின் நிறை 13 கிராம். நீரால் நிரப்பப்பட்ட தன்னீர்ப்புப் போத்தலும் திண்மமும் 63 கிராம் நிறையாகும். திண்மம் போத்தலுக்குள் இடப்படச் சேர்ந்த நிறை 53 கிராம். திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

திண்மம் போத்தலுக்குள் இடப்பட்ட பின்னர் போத்தலிலுள்ள நீரின் கனவளவு முன்னுள்ளதிலும் பார்க்கத் திண்மத்தின் கனவளவாற் சிறிதாகும்.

ஆகவே நிறை வித்தியாசமாகிய $63 - 53$ அல்லது 10 கிராம் திண்மத்தின் கனவளவுக்குச் சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறையாகும்.

ஆனால், திண்மத்தின் நிறை $= 13$ கிராம்.

$\therefore$ திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பு $= \frac{13}{10} = 1 \cdot 3$.

உதாரணம் 2. ஓரளவு தூளின் (நீரிற் கரையாத) நிறை p ஆகும். நீரால் நிரப்பப்பட்ட தன்னீர்ப்புப் போத்தலின் நிறை A ஆகும். தூளைக் கொண்டிருக்கும்போது அப்போத்தல் நீரால் நிரப்பப்பட அதன் மொத்த நிறை B ஆகும். தூளின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

தூளின் கனவளவுக்குச் சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறை w ஆகுக. ஆயின், தூள் போத்தலுக்குள் இடப்பட முன்னர் தூள், போத்தல், நீர் ஆகியவற்றின் மொத்த நிறை $= p + A$.

தூள் குடுவைக்குள் இடப்படும்போது அது w நிறையயுடைய நீரை இடம்பெயரச் செய்யும்.

ஆகவே மொத்த நிறை B முன்னுள்ளதிலும் பார்க்க w வாற் குறையும். அதாவது,

$$B = p + A - w\,;$$
$$\therefore \quad w = p + A - B\,,$$

$$\therefore \text{ தூளின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{தூளின் நிறை}}{\text{இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை}} = \frac{p}{p + A - B}$$

ஆகவே p, A, B என்பன தெரியுமாயின் தன்னீர்ப்புக் காணப்படலாம். தன்னீர்ப்புப் போத்தலின் நிறை தெரியவேண்டியதில்லை என்பதைக் கவனிக்க.

(c) **நீரிற் கரையும் ஒரு திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.**

நீரிற் கரையும் ஒரு திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காண்பதற்கு அத் திண்மத்தைக் கரைக்காத திரவம் ஒன்றைக் காணமுடியுமாயின் தன்னீர்ப்புப் போத்தலை நாம் பிரயோகிக்கலாம். இத்திரவத்தின் தன் னீர்ப்பு தெரிய வேண்டும். அல்லது (a) யில் உள்ளதுபோற் காணப்பட வேண்டும் ; இத்தன்னீர்ப்பு s ஆகுக. நீருக்குப்பதிலாக திண்மம் கரையாத இத்திரவத்தைப் பிரயோகித்து செயன்முறை (b) யைப் பயன்படுத்துவோ மாயின் நாம் முன்போல w, W_1, W_2 என்னும் மூன்று நிறுவைகளைப் பெறுவோம். ஆயின், $W_1 - W_2$ ஆனது இப்போது திண்மக்கனவள வுக்குச் சமகனவளவுடைய திரவத்தின் நிறையாகும்.

$$\therefore \text{ சமகனவளவுடைய நீரின் நிறை} = \frac{W_1 - W_2}{s}\,;$$

$$\therefore \text{ திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{திண்மத்தின் நிறை}}{\text{சமகனவளவுடைய நீரின் நிறை}}.$$

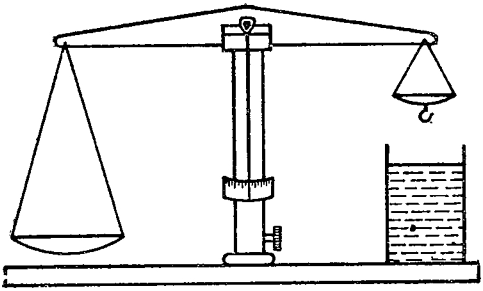
$$= \frac{w}{(W_1 - W_2)/s}$$

$$= \frac{ws}{W_1 - W_2}.$$

சீனி கற்பூரத்தைலத்திற் கரையாதாகையால் அதன் தனனீர்ப்பு இம் முறையாற் பெறப்படலாம்.

63. நீர்நிலையியற்றராசு

பாயியில் தொங்கவிடப்பட்ட உடலகளை நிறுத்தற்கு ஒரு பொதுத்தராசு செப்பஞ் செய்யப்படுமிடத்து அது **நீர்நிலையியற்றராசு** எனக் கூறப்படும் (படம் 188). நீர்நிலையியற்றராசுக்கும் சாதாரணத் தராசுக்கும் உள்ள ஒரேயொரு வேறுபாடு, முன்னதன் தட்டுகளுள் ஒன்று அதன் கீழ் ஒரு பாயிப் பாண்டம் வைக்கப்படுமாறு போதிய உயரத்திலிருக்கும்.



படம் 118

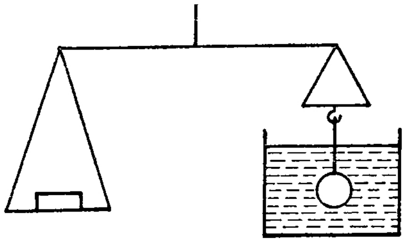
இத்தட்டின கீழ்ப்பக்கத் திலுள்ள ஒரு கொளுக் கியிலிருந்து ஒரு நுண் கம்பியால் யாதும் ஒரு சிறு திண்மம் தொங் கவிடப்பட்டு பாயியில் உள் ளாழ்த்தப்படும்போது நிறு க்கப்படலாம்.

(a) நீரில் ஆழும் (அதாவது தன்னீர்ப்பு > 1 ஆகும்) ஒரு திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

நீர்நிலையியற்றராசு இங்கு பின்வருமாறு பிரயோகிக்கப்படலாம் :—

(i) திண்மத்தைத் தராசுத் தட்டில் வைத்து நிறுக்க (W).

(ii) தராசுத் தட்டுக்குத் தொடுக் கப்பட்ட (படம் 119) ஒரு நுண் நூலால் திண்மத்தை நீரில் தொங்கவிட்டுக்கொண்டு மறுப டியும் நிறுக்க (P.)



படம் 119

ஆக்கிமிடீசின் கோட்பாட்டிலி ருந்து வளியிலும் நீரிலும் நோக்கிய நிறைகளின் வித்தி யாசமாகிய W - P என்பது திண்மத்தின் கனவளவுக்குச் சம கனவளவுடைய நீரின் நிறையாகும். ஆகவே, W - P = திண்மத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை.

$$\text{ஆகவே திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{திண்மத்தின் நிறை}}{\text{இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை}}$$

$$= \frac{W}{W - P}.$$

உதாரணம் 1. **ஒரு திண்மம் வளியில் 15 கிராம் நிறையும், நீரில் 5 கிராம் நிறையு மாகும் ; அதன் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.**

நீரிலுள்ள நிறை, வளியிலுள்ள நிறையிலும் பார்க்க இடம்பெயர்க்கப் பட்ட நீரின் நிறையாற் சிறிதாகும்.

∴ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை = 15 - 5 = 10 கிராம்.

திண்மத்தின் நிறை = 15 கிராம். ;

∴ திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பு $= \frac{15}{10} = 1{\cdot}5$.

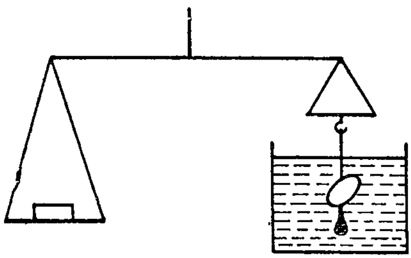
உதாரணம் 2. **ஒரு துண்டு பொன், வளியில் 598·3 கிராம் நிறையும் நீரில் 567·3 கிராம் நிறையும் ஆகும் ; அதன் கனவளவையும் தன்னீர்ப்பையுங் காணல்.**

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை $=598{\cdot}3-567{\cdot}3$ கிராம் $=31$ கிராம். ;

$\therefore$ பொன்னின் கனவளவு $=31$ கன சமீ. ;

பொன்னின் தன்னீர்ப்பு $=598{\cdot}2\div 31=19{\cdot}3$.

(*b*) **நீரில் மிதக்கும் (அதாவது தன்னீர்ப்பு <1 ஆகும்) திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.**



படம் 120

திண்மம் தானுக நீரிலே தொங்குமிடத்து அது மிதக்குமாதலால் முழுத் திண்மத்தின் கனவளவுக்குச் சமமான கன வளவுள்ள நீரின் நிறையை நாம் காணமுடியாது. இதனை நிவாரணம் செய்தற்கு, நிறுக்க வேண்டிய உடலைத் தாங்கும் நூலுக்கு ஆழி எனப்படும் ஒரு பாரமான உலோகத் துண்டு தொடுக்கப்பட்டு இவ்வுடலை நீரின் கீழ் ஆழ்த்தும்.

இச்செய்கைகள் பின்வருமாறு மிகநன்றுய்ச் செய்யப்படும் :—

(i) திண்மத்தை வளியில் நிறுக்க.

(ii) திண்மத்தையும் ஆழியையும் தராசுத் தட்டிலிருந்து ஒருங்கே தொஙகவிட்டு அவற்றை நீரில் நிறுக்க (படம் 120).

(iii) ஆழியை நீரில் நிறுக்க.

நீரில் திண்மம், ஆழி, ஆகியவற்றின் கூட்டு நிறை, நீரிலுள்ள ஆழியின் நிறையிலும் பார்க்கத் திண்மத்திலுள்ள மொத்த விளையுள் மேன்முக விசையின் பருமனுற் குறைந்திருக்கும். இவ்விசை, திண்மத்தால் இடப்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறைக்கும் திண்மத்தின் நிறைக்கும் உள்ள வித்தியாசமாகும். இது அறியப்படுவதாலும் முதல் நோக்கலிலிருந்து திண்மத்தின் நிறை தெரிவதாலும் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை காணப்படும். முன்போல் திண்மத்தின் தன்னீர்ப்புக் காணப்படலாம்.

உதாரணம். **ஒரு திண்மம் வளியில் 16 கிராம் நிறையாகும். ஒரு ஆழிக்குத் தொடுக்கப்பட்டு நீரில் உள்ளாழ்த்தப்படுமிடத்து மொத்த நிறை 6 கிராம் ஆகும். நீரில் ஆழியின் நிறை 10 கிராம் ஆகும். திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.**

இங்கு நீரில் திண்மம், ஆழி, ஆகியவற்றின் மொத்த நிறை = (நீரில் ஆழியின் நிறை) + (வளியில் திண்மத்தின் நிறை) – (திண்மத்தால் இடப் பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை)

$$= 6 \text{ கிராம்.}$$

ஆனால் நீரில் ஆழியின் நிறை = 10 கிராம்,

வளியில் திண்மத்தின நிறை = 16 கிராம் ;

∴ திண்மத்தால் இடபபெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை = 16 + 10 – 6 கிராம்.

= 20 கிராம்.

$$\therefore \text{ திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{திண்மத்தின் நிறை}}{\text{இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை}} = \frac{16}{20} = 0{\cdot}8.$$

அட்சரக்கணித முறையில் இம்முடிபைப் பின்வருமாறு நாம் குறிக்கலாம் :—

W = வளியில் திண்மத்தின் நிறை,

B = நீரில் திண்மம், ஆழி, ஆகியவற்றின் மொத்த நிறை,

A = நீரில் ஆழியின் நிறை.

நீரில் திண்மம், ஆழி, ஆகியவற்றின் மொத்த நிறை

= (நீரில் ஆழியின் நிறை) + (வளியில் திண்மத்தின் நிறை)

– (திண்மத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை) ;

ஆதலால்

∴ B = A + W – (திண்மத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை) ;

∴ திண்மத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை = A + W – B.

$$\text{ஆனால் திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{திண்மத்தின் நிறை}}{\text{இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை}} = \frac{W}{W + A - B}.$$

(c) ஒரு தந்த திரவத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

இது ஒரு நீர்நிலையியற்றராசு மூலம் பின்வருமாறு காணப்படலாம் :—

திரவம், நீர், என்பனவற்றின் தன்னீர்ப்புக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் கூடிய தன்னீர்ப்புடைய யாதும் ஒரு திண்மத்தை எடுக்க (ஈற்றுப் பிரிவின் பரிசோதனைகளில் வழங்கிய ஆழி இசைவாகும்) ;

(i) திண்மத்தை வளியில் நிறுக்க (W),

(ii) தன்னீர்ப்பு காணவேண்டிய திரவத்தில் அதனை நிறுக்க. இந்நிறை Q ஆகுக,

(iii) நீரில் நிறுக்க (P).

வளியிலும், தந்த திரவத்திலும் பெறப்பட்ட நிறைகளின் வித்தியாசம் (அ–து W – Q) திண்மத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை யாகும். வளியிலும் நீரிலும் பெறப்பட்ட நிறைகளின் வித்தியாசம் (அ–து W – P) இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறையாகும். இரு வகைகளிலும் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கனவளவுகள் சமமாதலால அவற்றின் நிறைகளின் விகிதம் திரவத்தின் தன்னீர்ப்பு ஆகும் ; அதாவது

$$\text{திரவததின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{திரவத்தின் நிறை}}{\text{சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறை}}$$

$$= \frac{W - Q}{W - P}.$$

உதாரணம். பின்வரும் தரவிலிருந்து கண்ணுடி, கிளிசறீன் ஆகியவற்றின் தன்னீர்ப் புகளைக் காணல் :—

வளியில் ஒரு கண்ணுடித் துண்டின் நிறை				=	10 கிராம்.
நீரில்	,,	,,	,,	=	6 கிராம்.
கிளிசறீனில்	,,	,,	,,	=	5 கிராம்.

இங்கு கண்ணுடியால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை $= 10 - 6 = 4$ கிராம்,
கண்ணுடியால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கிளிசறீனின் நிறை $= 10 - 5 = 5$ கிராம்,
கண்ணுடியின நிறை $= 10$ கிராம்.

$$\therefore \text{கிளிசறீனின தன்னீர்பபு} = \frac{\text{இடம்பெயர்க்கபபட்ட கிளிசறீனின் நிறை}}{\text{இடமபெயர்க்கப்பட்ட நீரின நிறை}}$$

$$= \tfrac{5}{4} = 1{\cdot}25\ ;$$

$$\text{கண்ணுடியின் தன்னீர்ப்பு} = \tfrac{10}{4} = 2{\cdot}5.$$

(d) **நீரிற் கரையும் ஒரு திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.**

(a), (b) என்னும் பிரிவுகளில் திணமம் நீரிற் கரையாதெனை எடுததுள் ளோம். எனினும், நீரிற கரையும் ஒரு திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காண்பதறகு நீர்நிலையியறறராசை நாம் பிரயோகிக்கவேண்டுமாயின், திண் மம் கரையாத தெரிந்த தனனீர்ப்புள்ள(s) திரவம் ஒன்றை முதல் எடுத்துக்கொண்டு பின்வருமாறு தொடரலாம் :—

(i) திண்மத்தை வளியில் நிறுக்க (W),

(ii) திண்மத்தைத் திரவத்தில் நிறுக்க (Q).

ஆயின், திரவத்தில் தோற்ற நிறை நட்டமானது திணமத்தால் இடம் பெயர்ககப்பட்ட திரவத்தின் நிறைக்குச் சமனுகும்.

எனவே திண்மத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை $= W - Q$.

$\therefore$ சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறை $= (W - Q)/s$;

$$\therefore \text{ திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{திண்மத்தின் நிறை}}{\text{சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறை}} = \frac{W}{(W - Q)/s} = \frac{Ws}{W - Q}.$$

உதாரணம். பின்வரும் தரவிலிருந்து நீரிற் கரையக்கூடியதும் கற்பூரத் தைலத்திற் கரையாததுமான ஒரு பதார்த்தத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல் :—

வளியில் திண்மத்தின் நிறை $= 32$ கிராம்.

கற்பூரத் தைலத்தில் திண்மத்தின் நிறை $= 3$ கிராம்.

கற்பூரத் தைலத்தின் தன்னீர்ப்பு $= 0{\cdot}87$.

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கற்பூரத் தைலத்தின் நிறை $= 32 - 3 = 29$ கிராம்.

ஆனால், கற்பூரத் தைலத்தின் நிறை $= 0{\cdot}87$ (சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறை)

$$\therefore \text{ சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறை} = \frac{29}{0{\cdot}87} = \frac{29 \times 100}{87} = \frac{100}{3} \text{ கிராம்.}$$

$$\text{திண்மத்தின தன்னீர்ப்பு} = \frac{32 \times 3}{100} = 0{\cdot}96.$$

நீரிலும் இலேசான ஒரு திண்மத்தை அதனிலுஞ் சிறிய தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் நிறுத்துக்கொண்டு, அதன் தன்னீர்ப்பைக் காண்பதற்கு இம் முறை வழங்கப்படலாம் ; ஆயின், ஆழியை உபயோகிக்கும் முறை தவிர்க் கப்படலாம்.

64. நிறுக்கும்போது இடம்பெயர்க்கப்பட்ட வளிக்குரிய திருத்தம்

திண்மங்களின் தன்னீர்ப்புகளைக் காணும்போது, அவற்றை வளியில் ஒரு பொதுத் தராசால் நிறுத்தலால் அவற்றின் நிறைகள் காணப்படுமென, உத்தேசித்துள்ளோம். கூடுதலான செம்மை வேண்டுமாயின் உடல்களை வெற்றிடத்தில் நிறுக்கவேண்டும் ; அல்லது, உடல்களும் உபயோகிக்கப்படும் நிறைகளும் வளியை இடம்பெயரச் செய்தலால், வளியில் ஒருடலின் தோற்ற நிறையானது அதன் உண்மையான நிறையிலும் பாரக இடம் பெயர்க்கப்பட்ட வளியின் நிறையாற் குறைந்திருக்குமென்னும் உண்மையைக் கவனிக்க வேண்டும். பல திண்மங்களினதும திரவங்களினதும அடர்த்திக ளோடு ஒப்பிடும் போது வளியின் அடர்த்தி மிகச் சிறிதாகும் ; அது நீரினுடைய அடர்த்தியின் $0{\cdot}0013$ ஆகும். ஆகவே பல வகைகளில் இடம்பெயர்க்கப் பட்ட வளியின் நிறை உடல் நிறையின் மிகச் சிறிய பின்னமாதலால் அவற்றை முற்றாய்ப் புறக்கணித்தலால் பெரு வழு ஏற்படா (§ 57 ஐப் பார்க்க).

எனினும் வேண்டுமாயின், இடம்பெயர்க்கப்பட்ட வளிக்கு ஈடு செய்தல் எளிதாகும். ஓர் உடல் ஒரு தராசுக் தட்டில் வைக்கப்பட்டு மற்றைத் தட்டில் நிறைகளாற் சமப்படுத்தப்படுமிடத்து, தோற்ற நிறைகள் அல்லது நிலத்தை நோக்கி உடலேயும் நிறைகளேயும் இழுக்க நாடும் விளையுள் விசைகள் சமமாகும். ஆகவே

உடலின் உண்மையான நிறை – உடலால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட வளியின் நிறை = நிறைகளின் நிறை – நிறைகளால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட வளியின் நிறை ....(i).

W உடலின் உண்மையான நிறையும், d அதன் அடர்த்தியும் ஆகுக. தராசு காட்டும் அதன் தோற்ற நிறை (அதாவது நிறைகளின் கூட்டுத் தொகை) W_0 எனவும், இந்நிறைகளை ஆக்கும் உலோகத்தின் அடர்த்தி d_0 எனவும் உத்தேசிக்க. ஆயின் வளியின் அடர்த்தி ρ ஆகுமிடத்து,

உடலின் கனவளவு $= \dfrac{W}{d}$ எனப் பெறுவோம்.

$\therefore$ உடலால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட வளியின் நிறை $= \dfrac{W}{d}\cdot\rho$.

இனி, "நிறைகளின்" கனவளவு $= \dfrac{W_0}{d_0}$;

$\therefore$ நிறைகளால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட வளியின் நிறை $= \dfrac{W_0}{d_0}\cdot\rho$;

$\therefore$ (i) என்னுஞ் சமன்பாடு தருவது $W - \dfrac{W\rho}{d} = W_0 - \dfrac{W_0}{d_0}\rho$,

அதாவது $W\left(1-\dfrac{\rho}{d}\right) = W_0\left(1-\dfrac{\rho}{d_0}\right)$;

$$\therefore W = W_0\left(1-\frac{\rho}{d_0}\right)\Big/\left(1-\frac{\rho}{d}\right).$$

ஆகவே உண்மையான நிறை (W) ஆனது தோற்ற நிறையை (W_0)

$$\frac{1-\dfrac{\rho}{d_0}}{1-\dfrac{\rho}{d}}$$

என்பதாற் பெருக்குதலாற் பெறப்படும்.

உதாரணம். ஒரு கிடேச்சுத் துண்டானது (தன்னீர்ப்பு 0·24) பித்தளை நிறைகளைக் (பித்தளையின் தன்னீர்ப்பு = 8·4) கொண்டு நிறுக்கப்படுமிடத்து அதன் தோற்ற நிறை $\frac{1}{2}$ இறாத்தலாகும். வளியின் தன்னீர்ப்பு 0·0013. ஆயின், கிடேச்சுத் துண்டின் உண்மையான நிறையைக் காண்க.

முன்னுள்ளதிலிருந்து

$$W = W_0 \left(\frac{1-\frac{\rho}{d_0}}{1-\frac{\rho}{d}} \right)$$

$$= 0{\cdot}5\left(1-\frac{0{\cdot}0013\times 62\frac{1}{2}}{8{\cdot}4\times 62\frac{1}{2}}\right)\Big/\left(1-\frac{0{\cdot}0013\times 62\frac{1}{2}}{0{\cdot}24\times 62\frac{1}{2}}\right)$$

$= 0{\cdot}50265$ இரு. ; சுருக்க.

65. நீரமானிகள்

நீரமானி என்பது திரவங்களின் தன்னீர்ப்பைக் காண்பதற்குரிய ஒரு கருவியாகும். அது திரவத்தில் மிதக்கவிடப்படும் ; ஒரு மிதக்கும் உடலின் நிறை அவ்வுடல் இடம்பெயரச் செய்யும் திரவததின் நிறைக்குச் சமமாகும் எனனுங் கோட்பாட்டைச் சார்ந்து அது தொழிற்படும். இரண்டு பிரதான வகை நீரமானிகள் உண்டு :—

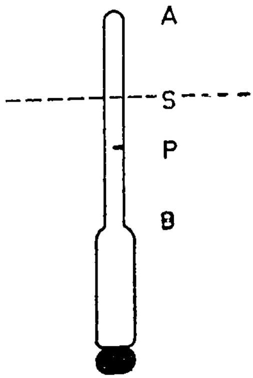
(i) பொது நீரமானி. இங்கு, நீரமானியின் நிறை மாறிலியாய் இருக்க அது இடப்படுந் திரவத்தில் ஆழும் ஆழத்தால் திரவத்தின் தன்னீர்ப்பைத் துணியும்.

(ii) நிக்கல்சனின் நீரமானி. இங்கு நீரமானியோடு தொடுக்கப்பட்ட ஒரு தராசுத்தட்டு உண்டு : இத்தட்டில் நீரமானியின் ஒரு குறிப்பிட்ட கனவளவு உள்ளாழ்த்தப்படும்வரை நிறைகள் ஏற்றப்படும்.

இவ்விரு நீரமானிகளைப்பற்றிக் கூடுதலாக விவரமாய் நோக்குவோம்.

(a) பொது நீரமானி.

இந்நீரமானி இரு குமிழ்களாக ஊதப்பட்ட ஒரு கண்ணுடிக் குழாயால் ஆக்கப்படும் (படம் 121). காம்பும் மேற்குமிழும் வளியால் நிரப்பப் பட, கீழ்க்குமிழ் இரசத்தால் நிரப்பப்படும் நீரமானி திரவத்தில் இடப்படுமிடத்து, குமிழ் முழுவதும் காம்பின் ஒரு பாகமும் உள்ளாழ்த் தப்பபட்டு நீரமானி நிலைக்குத்தாய் மிதக்கும். காம்பு படிவகுக்கப்படும் ; வேறுவேருன மட் டங்களிலுள்ள புள்ளிகள், அமமட்டஙளுக்கு நீரமானி ஆழும் திரவங்களின் தன்னீர்ப்புக் களைத் தரும்.



படம் 121

சீரானதென உத்தேசிக்கப்படும் காம்பு AB, a குறுக்குவெட்டு உடைய தாகுக. ஆயின் நீரமானி S என்னும் புள்ளி பரப்பிலிருக்குமாறு நீரில் மிதக்குமாயின், கனவளவு a.AS நீருக்கு வெளியே உண்டு. ஆகவே,

நீரமானியின் முழுக் கனவளவு V ஆயின், இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் கனவளவு $V - a.AS$ ஆகும். அலகுக் கனவளவுள்ள நீரின நிறை w ஆயின், இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை $w(V - a.AS)$ ஆகும். இது கருவியின் நிறைக்குச் சமமாகவேண்டும்.

இனி, $s\,(>1)$ தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தில் நீரமானி மிதக்குமாயின், உள்ளாழ்த்தப்பட்ட கனவளவு சிறிதாகும்; இப்போது புள்ளி P பரப்பில் இருக்குமென உத்தேசிக்க. இவ்வகையில் உள்ளாழ்த்தப்பட்ட கனவளவு

$$V - a.AP \text{ ஆகும்.}$$

ஆதலால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை

$$ws(V - a.AP)$$

ஆகும். இதுவும் கருவியின் நிறைக்குச் சமமாகவேண்டும்.

$$\therefore \quad ws(V - a.AP) = w(V - a.AS);$$

$$\therefore \quad s = \frac{V - a.AS}{V - a.AP}.$$

நீரமானியைப் படிவகுத்தற்கு இது உதவும்.

உதாரணம் 1. $1\frac{1}{2}$ அவுன்சு நிறையுள்ள ஒரு நீரமானி $2{\cdot}4$ கன அங்குலம் உள்ளாழ்த்தப்படும்வரை ஒரு திரவத்தில் ஆழும் எனத் தரப்படுமிடத்து, அத்திரவத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

இங்கு $2{\cdot}4$ கன அங்குலமுள்ள திரவத்தின் நிறை

$$= 1{\cdot}5 \text{ அவுன்சு};$$

$$\therefore 1 \text{ கன அங்குலமுள்ள திரவத்தின் நிறை} = \frac{1{\cdot}5}{2{\cdot}4} \text{ அவு.} = \tfrac{5}{8} \text{ அவு.}$$

$$1 \text{ கன அடி திரவததின் நிறை} = 1728 \times \tfrac{5}{8} \text{ அவு.} = 1080 \text{ அவு.}$$

$$1 \text{ கன அடி நீரின் நிறை} = 1000 \text{ அவு.}$$

$$\therefore \text{ திரவத்தின் தனனீர்ப்பு} = \frac{1080}{1000} = 1{\cdot}08.$$

உதாரணம் 2. ஒரு பொது நீரமானியின் காம்பின் விட்டம் $0{\cdot}2$ அங். எனவும், இரு குமிழ்களின் கனவளவு $0{\cdot}754$ கன அங். எனவும் நீரமானியின் நிறை $\frac{1}{2}$ அவு. எனவும் தரப்படுமிடத்து. காம்பின் $3\frac{1}{2}$ அங். உள்ளாழ்த்தப்படுமாறு நீரமானி மிதக்கும் ஒரு திரவத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

இங்கு உள்ளாழ்த்தப்பட்ட காம்பின் பாகம் $3\frac{1}{2}$ அங்குல உயரமும், அடியின் ஆரை $\frac{1}{2} \times 0{\cdot}2$ அல்லது $0{\cdot}1$ அங்குலமுமுள்ள ஓர் உருளை ஆகும்.

ஆகவே காம்பின உள்ளாழ்த்தப்பட்ட பாகத்தின் கனவளவு

$$= \tfrac{22}{7} \times (0{\cdot}1)^2 \times \tfrac{7}{2} = 0{\cdot}11 \text{ கன அங்.}$$

அன்றியும், குமிழ்களின் கனவளவு $= 0{\cdot}754$ கன அங்.

ஆகவே இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் முழுக் கனவளவு

$$=0\cdot754+0\cdot11=0\cdot864 \text{ கன அங்.}$$

ஆனால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை = நீரமானியின் நிறை

$$=\tfrac{1}{2} \text{ அவு.}$$

$\therefore$ 0·864 கன அங்குலமுள்ள திரவம் $\frac{1}{2}$ அவு. நிறையாகும்.

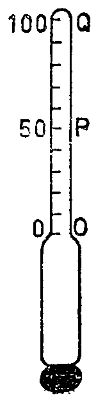
$\therefore$ 1 கன அங்குலமுள்ள திரவம் $\frac{1}{2\times\cdot864}=\frac{1}{1\cdot728}$ அவு. நிறையாகும்.

$\therefore$ 1 கன அடியுள்ள திரவம் $\frac{1728}{1\cdot728}$ அவு. = 1,000 அவு. நிறையாகும்.

ஆகவே திரவம் நீரைப்போல் அதே அடர்த்தியை உடையதாகி, அதன் தன்னீர்ப்பு ஒன்று ஆகும்.

உதாரணம் 3. **ஒரு நீரமானியின் காம்பு 100 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கப்படும். நீரில் 0 எனவும், 0·8 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் 100 எனவும் அது வாசிக்கும். நீரமானி 50 என வாசிக்கத் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.**

O, Q என்பன (படம் 122) 0,100 எனக் குறிக்கபபட்ட புள்ளிகளாகுக ; P, 50 எனக் குறிக்கப்பட்ட புள்ளி.



படம் 122

நீரமானியின் நிறைக்குச் சமமான நிறையுள்ள நீரின் கனவளவு V ஆகுக. ஆயின் V யானது நீரமானி நீரில் மிதக்கும் போது இடம்பெயர்க்கபபட்ட நீரின் கனவளவாகும்.

$\therefore$ O விற்குக் கீழ் உள்ள பாகத்தால் இடம் பெயர்க்கப் பட்ட கனவளவு = V.

நீரமானி 0·8 தன்னீர்ப்புள்ள இலேசான திரவத்தில மிதக்குமிடத்து, அது திரவத்தின சமநிறையை இடம்பெயரச் செய்தலால் திரவத்தின் கூடுதலான கனவளவு இடம்பெயரும்.

$\therefore$ Q விற்குக் கீழ் உள்ள பாகத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கனவளவு $=V\div0\cdot8=1\cdot25\ V$;

$\therefore$ காம்பு OQ வின் கனவளவு $=1\cdot25V-V=0\cdot25\ V$;

அதாவது, காம்பின் 100 பிரிவுகளின் கனவளவு $=0\cdot25\ V$;

$\therefore$ காம்பின் 50 பிரிவுகளின் கனவளவு $=0\cdot125\ V$;

$\therefore$ P யின் கீழ் உள்ள பாகத்தால் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட கனவளவு $=V+0\cdot125\ V=1\cdot125V$.

இது தந்த திரவத்தில் நீரமானியால் இடம்பெயாக்கப்பட்ட கனவளவு ஆகும். இதன் நிறை இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறைக்குச் சமமாகும்.

$\therefore$ தந்த திரவத்தினது 1·125V கனவளவின் நிறை = நீரின V என்னும் கனவளவின் நிறை.

∴ தந்த திரவத்தினுடைய அலகுக் கனவளவின் நிறை = நீரின் $1 \div 1 \cdot 125$ என்னுங் கனவளவின் நிறை.

வேண்டிய திரவத்தின் தன்னீர்ப்பு $= 1 \div 1 \cdot 125 = \frac{8}{9} = 0 \cdot 8$.

[**குறிப்பு.** 50 என்னும் புள்ளி 0, 100 என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையே நடுவில் உள்ளபோதிலும், வேண்டிய தன்னீர்ப்பு ஒத்த தன்னீர்ப்புக்களுக் கிடையே நடுவில் இல்லை ; அதன் பெறுமானம் 0·8 ஆதலால் முதற் கருத்தில் எதிர்பார்க்கப்படக்கூடியதுபோல் 0·9 ஆகவில்லை].

உதாரணம் 4. **ஈற்று உதாரணத்தின் தரவைக்கொண்டு 28 என்னும் வாசித்தலுக்கு ஒத்த திரவத்தின் தன்னீர்ப்பைக் கானல்.**

$$\text{காம்பின் } 100 \text{ பிரிவுகளின் கனவளவு} = 0 \cdot 25 \text{ V} ;$$

எனக் கண்டுள்ளோம்.

$$\therefore 28 \text{ பிரிவுகளின் கனவளவு} = \tfrac{28}{100} \times 0 \cdot 25 \text{ V} = 0 \cdot 07 \text{ V} ;$$

தந்த திரவத்தில் நீரமானியால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கனவளவு $= 1 \cdot 07$ V.

∴ திரவத்தின 1·07 V என்னுங் கனவளவின் நிறை = V என்னுங் கனவளவின் நிறை ;

∴ திரவத்தின் தன்னீர்ப்பு $= 1 \div 1 \cdot 07 = 0 \cdot 9346$, ஏறக்குறைய.

உதாரணம் 5. **சீரான குறுக்கு வெட்டுள்ள கோல் ஒன்றை மேல் ஏற்றிய ஒரு குமிழை ஒரு நீரமானி கொண்டிருக்கும். s_1, s_2 என்னுந் தன்னீர்ப்புக்கள் உள்ள திரவங்களில் உள்ளாழ்த்தப்படும்போது முறையே கோலின் a, b என்னும் நீளங்கள் திரவங்களின் மேல் இருக்கும். திரவங்களின் சமநிறையைக் கொண்ட ஒரு கலவையில் உள்ளாழ்த்தப்படுமிடத்து கோலின் $\frac{1}{2}(a+b)$ நீளம் கலவைக்கு மேல் இருக்குமென நிறுவுக.** (Inter. Eng.)

W, நீரமானியின் நிறையும் ; V அதன் கனவளவும் ஆகுக. கோலின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு d ஆயின், கோலின் a என்னும் நீளம் திரவத்தின்மேல் இருக்குமிடத்து இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை

$$(\text{V} - ad)\, s_1\, w, \text{ ஆகும்.}$$

இது நீரமானியின் நிறையாகிய W என்பதற்குச் சமமாகும்.

இதே மாதிரி $\qquad \text{W} = (\text{V} - bd)\, s_2\, w.$

கலவையின் தன்னீர்ப்பு S ஆயும் நீரமானி கலவையில் மிதக்கும்போது கோலினது k நீளம் பரப்பிற்கு மேலிருக்குமாயின்

$$\text{W} = (\text{V} - kd)\, \text{S}w$$

என்பதும் பெறப்படும்.

ஒவ்வொரு வகையிலும், w நீரினுடைய அலகுக் கனவளவின் நிறை யாகும்.

ஆகவே நீரமானியினுடைய நிறையின் மாருத் தன்மையிலிருந்து

$$W=(V-ad)\,s_1w=(V-bd)\,s_2w=(V-kd)Sw\;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்னுந் தொடர்புகளைப் பெறுவோம்.

கலவையின் தன்னீர்ப்பை (S), கலவை ஆக்குந் திரவங்களினது தன்னீர்ப்புக்களின் (s_1, s_2) சார்பாய் நாம் பெறலாம். s_1 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தின் v_1 என்னுங் கனவளவு, s_2 தன்னீர்ப்புள்ள v_2 என்னுங் கனவளவோடு கலக்கப்படுமென உத்தேசிப்போமாயின், நிறைகள் சமமாதலால்

$$v_1s_1=v_2s_2\;\ldots\ldots\ldots\ldots(ii),$$

$$(v_1+v_2)\,S=v_1s_1+v_2s_2\;\ldots\ldots\ldots\ldots(iii).$$

(ii), (iii) என்பனவற்றிலிருந்து v_1, v_2 என்பனவற்றை நீக்க,

$$\left(v_1+\frac{v_1s_1}{s_2}\right)S=2v_1s_1\,;$$ எனப் பெறுவோம்.

$$\therefore\quad S=\frac{2s_1s_2}{s_1+s_2}=\frac{2}{\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(iv).$$

(i) என்னுந் தொடர்புகள்

$$V-ad=\frac{W}{w}\cdot\frac{1}{s_1}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(v)$$

$$V-bd=\frac{W}{w}\cdot\frac{1}{s_2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(vi)$$

$$V-kd=\frac{W}{w}\cdot\frac{1}{S}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(vii)$$

என உணர்த்தப்படலாம்.

(v), (vi) என்பனவற்றைக் கூட்ட,

$$2V-(a+b)d=\frac{W}{w}\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}\right)$$

$$=\frac{W}{w}\cdot\frac{2}{S},$$ (iv) இலிருந்து

$$=2\,(V-kd),$$ (vii) இலிருந்து

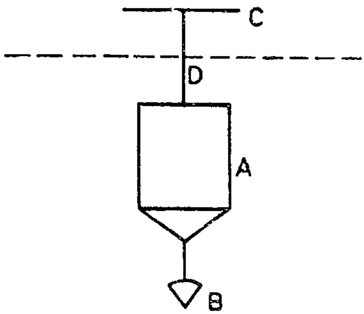
$$=2V-2kd\,;$$

$$(a+b)\,d=-2kd\,;$$

$$\therefore\quad k=\tfrac{1}{2}(a+b).$$

(b) நிக்கல்சன் நீரமானி.

இது ஓர் மாறாக் கனவளவு நீரமானி; ஏனெனின், அதனை ஒரு திரவத்தில் மிதக்கச் செய்யும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட கனவளவு உள்ளாழ்த்தப்படும்வரை நிறைகள் ஏற்றப்படும்.



படம் 123

A என்னும் பொள் உலோகக் கொள்ளியையும் அதன் அடியில் தொடுக்கப்பட்ட B என்னும் நிலேத்த பாரமான உலோகக் கிண்ணத்தையும் இந்த நீரமானி கொண்டிருக்கும் (படம் 123). கொள்ளியின் மேல் C என்னுந் தராசுத்தட்டைத் தாங்கும் ஒரு காம்பு நீண்டிருக்கும். இக் காம்பில் D என்னும் ஒரு நிலேத்த குறி உண்டு. எத்திரவத்தில் நீரமானி மிதக்கவிடப்பட்டாலும் D சரியாயப் பரப்பிலிருக்கும் வரை தராசுத் தட்டில் நிறைகள் இடப்படும். ஆயின் ஒவ்வொரு வகையிலும், செப்பமாய், ஒரே கனவளவு உள்ளாழ்த்தப்படும்.

ஒரு திரவத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

பினவரும் நோக்கல்களேச் செய்தல் வேண்டும்.

(i) வளியில் நீரமானியின் நிறையைக் (W) காண்க.

(ii) கருவியை நீரில் மிதக்கவிட்டு, புள்ளி D பரப்பில் இருக்கும் வரை தராசுத் தட்டில் நிறைகளே இடுக. இந்நிறைகள் P யாகுக.

(iii) இனி, தன்னீர்ப்புக் காணவேண்டிய திரவத்தில் நீரமானியை மிதக்க விடுக; புள்ளி D யைப் பரப்பு மட்டத்திற்கு ஆழச் செய்தற்கு Q என்னும் நிறை வேண்டுமென உத்தேசிக்க.

முதல் இரண்டு அளவீடுகளிலுமிருந்து நிலேத்த புள்ளி D யின் கீழ் உள்ள நீரமானியின பாகத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை எமக்குத் தெரியும். இதற்குக் காரணம், இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை, நீரமானியின் முழு நிறையோடு தராசுததட்டின் நிறைக்கு, அதாவது $W+P$ யிறகுச், சமன் என்பதே.

மூன்ருவது துணிபிலிருந்து இடம்பெயர்க்கப்பட்ட அதே கனவளவுள்ள திரவததின் நிறை $W+Q$ என நாம் பெறுவோம்.

$$\text{ஆகவே திரவத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை}}{\text{சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறை}}$$

$$= \frac{W+Q}{W+P}.$$

உதாரணம். **60 கிராம் நிறையுள்ள நிக்கல்சன் நீரமானியை நிலைத்த குறிக்கு பிரண்டியில் ஆழ்த்தற்கு மேற்றராசுத் தட்டில் 23·7 கிராம் வேண்டுமெனவும், அதே குறிக்கு நீரில் ஆழ்த்தற்கு 40 கிராம் வேண்டுமெனவும் தரப்படுமிடத்து, பிரண்டியின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.**

முதல் நோக்கலில், பிரண்டியால் தாங்கப்படும் மொத்த நிறை

$$=60+23{\cdot}7=83{\cdot}7 \text{ கிராம்.}$$

ஆகவே இடம்பெயர்க்கப்பட்ட பிரண்டியின் நிறை $=83{\cdot}7$ கிராம். இரண்டாம் நோக்கலில், இதே மாதிரி இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை $=60+40=100$ கிராம். ஆனால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட பிரண்டி, நீர், ஆகியவற்றின் கன வளவுகள் சமமாகும்.

$$\therefore \text{ பிரண்டியின தன்னீர்ப்பு} = \frac{83{\cdot}7}{100} = 0{\cdot}837.$$

ஒரு திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

ஒரு திண்மம் நிக்கல்சன் நீரமானியின் உலோகக் கிண்ணம் B யில் இடப்படுமளவிற்குச் சிறிதாகுமாயின, அதன் தனனீர்ப்பைத துணிதற்கு இந்நீரமானி பிரயோகிக்கப்படலாம்.

பினவரும் அளவீடுகள செய்யப்பட வேண்டும் :—

(i) நீரமானி தனித்து நீரில் மிதக்க விடப்பட்டு, புள்ளி D பரப்பில் வரும்வரை மேற்றராசுத் தட்டில் நிறைகள் இடப்படும். இந்நிறைகள P ஆகுக.

(ii) இனி, திண்மமும், புள்ளி D யைப இப்போது பரப்புக்கு ஆழ்த் தற்கு வேண்டிய நிறைகளும் (Q) மேற்றராசுத் தட்டில் இடப்படும். ஆகவே திண்மத்தின் நிறை P – Q ஆகும்.

(iii) இனி, திண்மம் கீழ் உலோகக் கிண்ணம் B யில் இடப்பட்டு முழுவதும் நீரில் உள்ளாழ்த்தப்பட, புள்ளி D யைப் பரப்புவரை ஆழ்த் தற்கு மேற்றராசுத் தட்டில இடப்படவேண்டிய நிறைகள் (R) குறிக் கப்படும்.

(iii) இல் திண்மத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறைக்குச் சமமான கூடுதலான மேலுதைப்பு உண்டு எனபதே (ii), (iii) என்பனவற்றிற்கிடையே உள்ள வேறுபாடாகும். ஆகவே நீரமானியைப் புள்ளி D யிற்குத் தாழ்த் தற்கு (iii) இல் (ii) இலுங் கூடுதலான விசை வேணடும் ; அதாவது R>Q ஆகி, திண்மத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை = R – Q ஆகும்.

$$\text{ஆகவே திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{திண்மத்தின் நிறை}}{\text{சமகனவளவுள்ள நீரின் நிறை}}$$

$$=\frac{P-Q}{R-Q}.$$

உதாரணம். நீரில் இடப்பட்ட ஒரு நிக்கல்சன் நீரமானியை நிலைத்த புள்ளிக்கு ஆழ்த்தற்கு மேற்றராசுத் தட்டில் 40 கிராம் இடப்பட வேண்டும். ஒரு வெள்ளித் துண்டு மேற்றராசுத் தட்டில் இடப்படுமிடத்து நிலைத்த புள்ளிக்கு ஆழ்த்தற்கு 8·5 கிராம் வேண்டும். வெள்ளித் துண்டு கீழ்த்தராசுத் தட்டில் இடப்படுமிடத்து மேற்றட்டில் 11·5 கிராம் வேண்டும். வெள்ளியின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

இங்கு வெள்ளித் துண்டு மேற்றராசுத் தட்டில் இடப்படுமிடத்து மொத்த நிறையை முன்போல் ஆக்கற்கு 40 − 8·5, அல்லது 31·5 கிராம் அகறறப்பட வேண்டும்.

ஆகவே வெள்ளியின் நிறை 31·5 கிராம்.

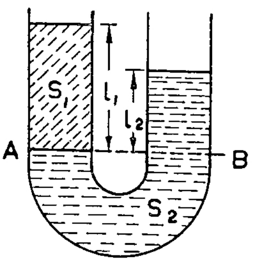
வெள்ளி கீழ்த்தட்டுக்கு இடமாற்றப்பட்டு உள்ளாழ்த்தப்படும்பொழுது வெள்ளியிலுள்ள நீரின மேலுதைப்பை எதிர்த்தற்கு 11·5–8·5, அல்லது 3 கிராம் மேற்றட்டில் இடவேண்டும்.

∴ வெள்ளியால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை = 3 கிராம்.

$$\therefore \text{வெள்ளியின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{31 \cdot 5}{3} = 10 \cdot 5.$$

66. U – குழாய்கள்

ஒன்றோடொன்று கலவாத இரு திரவங்களின் தன்னீர்ப்புகள் ஒரு U – குழாய் மூலம் மிக எளிதாய் ஒப்பிடப்படலாம்.



படம் 124

இரு திரவங்களின் தன்னீர்ப்புகளும் s_1, s_2 ஆகுக ; படம் 124 இற் காட்டப்பட்டுள்ளது போல் ஒவவொரு திரவத்திலும் ஓரளவு U – குழாய்க்குள் வார்க்கப்படும். A பொதுப் பரப்பையும் ; B, U – குழாயின் மற்றப் புயததில் அதே கிடைத் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியையும் குறிக்கு மாயின, A யில் உளள அமுக்கச் செறிவு B யில் உள்ள அமுக்கச் செறிவுக்குச் சமமாகும் (அதி காரம் III). s_1 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தின் l_1 நீளம் உண்டெனின், A யில் அமுக்கச் செறிவு $= P + l_1 s_1 \times 62\frac{1}{2}$ இரு. நிறை / சதுர அடி. ; இங்கு P வளிமண்டல அமுக்கமாகும்.

B யிற்கு மேல் s_2 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தின l_2 நீளம் உண்டெனின்,

B யில் அமுககச் செறிவு $= P + l_2 s_2 \times 62\frac{1}{2}$ இரு. நிறை / சதுர அடி. இவ்வமுக்கச் செறிவுகளைச் சமப்படுதத $l_1 s_1 = l_2 s_2$ எனப் பெறுவோம்.

அல்லது $$\frac{l_1}{l_2} = \frac{s_2}{s_1};$$

அதாவது, பொதுப் பரப்பிற்கு மேலுள்ள திரவங்களின் உயரங்கள் அவற்றின் தன்னீர்ப்புகளுக்கு நேர்மாறுமுறை விகிதசமமாகும். ஆயின்,

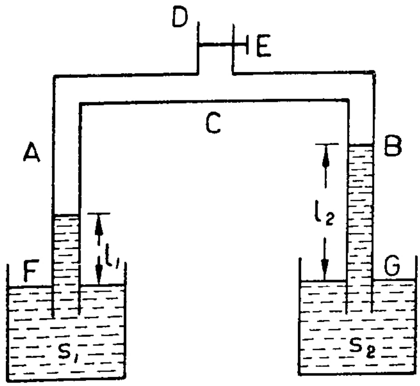
ஒரு திரவம் நீர் அல்லது தெரிந்த தன்னீர்ப்புள்ள திரவமாயின், மற்றைத் திரவத்தின் தன்னீர்ப்பு l_1, l_2 என்னும் நீளங்களைக் கண்ட பின்னர் மேலுள்ள தொடர்பில் இருந்து நேரடியாகப் பெறப்படலாம்.

இக்கோட்பாட்டை உட்படுத்தும் ஓர் உதாரணம் அதிகாரம் III (உதாரணம் 1, § 22) இல் ஏற்கனவே செய்யப்பட்டுள்ளது.

67. ஹெயரின் நீரமானி.

இந்த நீரமானி உண்மையில் ஒரு 'கவிழ்த்தப்பட்ட U – குழாயாகும். ஆனால் இரு திரவங்களும் ஒன்றோடொன்று தொடாதவாறு அவற்றின் தன்னீர்ப்புகளை ஒப்பிடுதற்கு இது பிரயோகிக்கப்படலாம், என்னும் நயம் இதற்கு உண்டு. எனவே அத்திரவங்கள் ஒன்றோடொன்று கலக்குமா அல்லவா என்பதுபற்றிச் சிந்திக்கவேண்டியதில்லை.

இந்நீரமானி C என்னும் ஒரு பொட் கிடைக் குழாயால் தொடுக்கப்பட்ட A, B என்னும் இரு பொள் நிலைக் குத்துக் குழாய்களால் ஆக்கப்படும். C யிலிருந்து உள்ளடைத்த வளியின் ஒரு பாகம் வெளியே இழுக்கப்படலாம் (படம் 125).



படம் 125

தன்னீர்ப்புகள் (s_1, s_2) ஒப்பிடப்பட வேண்டிய திரவங்களுக்குள் இரு நிலைக்குத்துக் குழாய்களின் முனைகளும் இடப்படும். நீரமானிக்குள் உள்ள வளி அமுக்கம் வளிமண்டல அமுக்கத்திலுஞ் சிறிதாகுமாறு D என்னும் வெளிவழிக்கூடாக சிறிதளவு வளி இழுக்கப்பட்டு பின்னர் E என்னும் அடைப்பை, அல்லது வாயிலை, மூடி அது அடைக்கப்படும். நீரமானிக்குள் உள்ள இவ்வமுக்க ஒடுக்கம் நிலைக்குத்துக் குழாய்களில் திரவங்களை எழச் செய்யும். F, G என்னும் பரப்புகளுக்கு மேலுள்ள உயரங்கள் முறையே l_1, l_2 ஆகுமென உத்தேசிக்க. P வளிமண்டல அமுக்கத்தையும், P′ நீரமானிக்குள் உள்ள வளி ஒடுக்கப்பட்ட அமுக்கத்தையும் குறிக்குமாயின், F இல் அமுக்கச் செறிவு P ஆகும். ஆனால் F இல் அமுக்கச் செறிவு இடதுகைக் குழாயில் அதே மட்டத்தில் உள்ள அமுக்கச் செறிவுகளுச் சமமாகும் ; அதாவது,

$$P=P'+l_1s_1w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

இங்கு, w = நியமப் பதார்த்தத்தினுடைய அலகுக் கனவளவின் நிறை

இனி, G இல் (P என்னும் வளிமண்டல அமுக்கத்தில்) அமுக்கச் செறிவு, G இன் அதே மட்டத்தில் வலதுகைக் குழாயிலுள்ள அமுக்கச் செறிவுக்குச் சமமாகும்; இவ்வமுக்கச் செறிவு $P' + l_2 s_2 w$ ஆகும்.

ஆகவே $$P = P' + l_2 s_2 w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

(i), (ii) என்பனவற்றைச் சமப்படுத்த,

$$l_1 s_1 = l_2 s_2$$

என்னும் U – குழாய்க்குள்ள அதே தொடர்பு பெறப்படும். F, G என்பன ஒரே மட்டத்தில் இருக்கவேண்டியதில்லை என்பது கவனிக்கப்படவேண்டும். அவை எங்கேனும் இருந்தபோதிலும், இப்பரப்புகள் வளிமண்டல அமுக்கத்திலிருக்கும்; இது மாத்திரமே; மேலுள்ள நிறுவலுக்கு வேண்டியது.

68. எண் முடிபுகளின் புள்ளிவிபரப் பரிசோதனை

இவ்வதிகாரத்தின் தொடக்கத்திலே தரப்பட்ட தன்னீர்ப்பு அட்டவணையை மீண்டும் எடுத்து நோக்குக. எல்லாப் பெறுமானங்களும் இரண்டு தசம தானங்களுக்குத் தரப்பட, கண்ணடி, ஒக்குமரம் ஆகியவற்றின் வகையில் ஒரு மாறல் வீச்சுத் தரப்பட்டுள்ளது என்பது கவனிக்கப்படத் தக்கது. உண்மையில் மற்றைய பலவற்றில் சொற்ப மாறல்கள் இருக்கும். உதாரணமாக, எல்லா மரங்களிலும் மாறக்கூடிய சொற்பமான உள்ளூறை ஈரப்பற்று இருத்தலால், வேறுவேறான மாதிரிகளுக்கு தன்னீர்ப்புகள இரண்டாம் தசமதானத்தில வேறுவேறான இலக்கங்களை எளிதிற் கொள்ளலாம்.

பொன்னின் தன்னீர்ப்பைக் காணபதற்குப் பரிசோதனைச்சாலையில் ஒரு பரிசோதனை செய்யப்படுமெனை உத்தேசிக்க. எம்மட்டவணையில பொனனின் தன்னீரப்பு 19·25 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. எம் பரிசோதனையிலிருந்து 19·17 என்னும் பெறுமானம் பெறப்படுமாயின், இது நல்ல முடிபு ஆகுமென்றே கருதப்படும. ஆனல் பெறப்பட்ட பெறுமானம் 16·75 (எனக) ஆயின பரிசோதனையில் ஏதோ தவறு உண்டு என உத்தேசிக்கப்பட்டு, மாதிரிப் பொன தூய பொன்தானு, முறை திருத்தமாய் நடத்தப்பட்டதா எனச் சரிபாாக்க வேண்டும். ஆனல, சாத்தியமான கவனம் செலுத்தியபோதிலும் பொதுவாகப் பெறப்பட்ட பெறுமானம் திருத்தமாய் 19·25 ஆகாதெனக் காணப்படும். அது சற்றுப் பெரிதாய அல்லது சற்றுச் சிறிதாய் இருக்கலாம. அன்றியும் அதே மாதிரியோடு பரிசோதனை மீண்டும் செய்யப்படுமாயின முதன முடிபோடு வேறுபட்ட முடிபைப் பெறுதல் சாத்தியம். இதறகுக காரணம, சாத்தியமான முன் எச்சரிக்கை எடுக்கப்பட்டபோதிலும் ஒரு தொகை சிறு வழுக்கள உட்புகும். இவை தனித்தனியாக மிகச் சிறியனவாயினும், ஒருங்கு சேர்ந்து இறுதியாகப் பெற்ற பெறுமானத்தைத் தாக்கும். தற்செயலான வழுக்கள் எனப்படும் இவ்வழுக்களே 19·25 இலிருந்து சிறு விலகலை ஆக்கும்; பொதுவாக அவை சிலசமயங்களில் 19.25 இலும் பெரிதான முடிபையும், சில சமயங்களில் இதனிலும் சிறிதான

முடிபையும் தரும். ஆயின் பரிசோதனையைப் பல முறையும் திரும்பச் செய்து கொண்டு முடிபுகளின் **சராசரியை அல்லது இடையை** எடுத்தலால் தன்னீர்ப்பின் மிகச் சிறந்த பெறுமானம் காணப்படும்.

பரிசோதனை செய்யும்போது கூடுதலான முன் எச்சரிக்கை எடுக்கப் பெறுமானங்களும் 19·25 இற்குக் கூடிய அளவு அண்மையிலிருக்கும். வேறுமாதிரிக் கூறின் இப்பெறுமானங்கள் உண்மையான பெறுமானம் பற்றிக்கூடுதலாகச் செறிந்திருக்கும்.

ஒரே தரமுடைய பெருந்தொகையான அளவீடுகளை எடுத்து நோக்குமிடத்து, இடையைத் துணிதலோடு இடைபற்றி இச் செறிவின் அளவு அல்லது சிதறற் படியைக் காணல் பலமுறையும் பயனபடும். இதன் மிக இசைவான அளவு "**நியம விலகல்**" எனக் கூறப்படும். இதனையும இது போன்ற விடயங்களையும் பற்றிக் கூடுதலான தகவல் புள்ளிவிபரவியல் நூல்களிற் பெற்றுக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி IX

1. ஒரு தன்னீரப்புப போத்தல வெறுமையாய் இருக்குமபோது 42 கிராம் நிறையும் முறையே நீர், கிளிசறீன, என்பனவற்றால நிரபபபபடும்போது 222 கிராம, 269 கிராம் ஆகிய நிறைகளுமாகும். கிளிசறீனின தனனீரபபைக காணக.
2. ஒரு சோக்குத்துண்டு வளியில 48 கிராமும், நீரில 28 கிராமும் நிறுக்கும். அதன் தன்னீரபபைக் காண்க.
3. நீர் நிரம்பிய ஒரு தன்னீர்ப்புப் போத்தல 44 கிராம நிறையாகும் ; வளியில 10 கிராம் நிறையுடைய சில இரும்புத துண்டுகள போத்தலுககுள் இடபபட்டுப் போததல மீண்டும் நீரால நிரபபப்படுமிடத்து மொத்த நிறை 52·7 கிராம் ஆகும். இருமபின் தன்னீரப்பு யாது ?
4. 50 கிராம் நிறையுடையதும் 500 கிராம் நீர கொளளக்கூடியதுமான தன்னீர்ப்புப் போத்தலுககுள 100 கிராமுளள ஒரு குறிதத தூள இடபபடும. போத்தல் 0·72 தன்னீரப்புளள ஈதரால் நிரப்பபபட முழுவதும் 474 கிராம் நிறையாகும். தூளை ஆக்கும் பதார்த்தத்தின் தன்னீர்ப்பைக காணக.
5. 216·3 கிராம் நிறையுளள இரும்புத் துணடு (தனனீரப்பு = 7·21) 36 கிராம் நிறையுள்ள இடேச்சுத் துண்டுககுத தொடுககபபடும் ; நீரில் அவறறின் மொத்த நிறை 36·3 கிராமாயின் இடேசின் தன்னீரப்பைக காணக.
6. ஓர் உலோகக குண்டு வளியில 9 இரு. நிறையும் நீரிலே தொஙகுமிடதது 8 இரு. நிறையுமுடையதாகும. எததன்னீர்ப்புடைய திரவத்தில அது $7\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுடையதாகும் ?
7. ஓர் இரும்பு ஓடு, நீரில் நிறுககபபடுமிடத்து அதன் அரைப்பஙகு நிறையை இழககுமெனக காணப்படும். அதன் கனவளவில யாது பாகம் பொளளாகும் (இரும்பின் தன்னீர்ப்பு 7·2).
8. நீரிற் கரையும் ஓர் உடல 27 கிராம நிறையாகும். 0·9 தனனீர்ப்புக கொணட திரவத்தில் நிறுககப்படுமிடத்து $20\frac{1}{4}$ கிராம் நிறையாகும். அதன் தன்னீரப்பைக காணக.

9. ஒரு வெள்ளித் துண்டும் ஒரு பொன் துண்டும் ஒரு சமபுயமுடைய தராசு வளையின் புயங்களிலிருந்து தொங்கவிடப்படும்; வெள்ளி அற்ககோலிலும் (அடர்த்தி 0·85), பொன் நைத்திரிககமிலத்திலும் (அடர்த்தி 1·5) உள்ளாழ்த்தப்படுமிடத்து வளை சமநிலையிலிருக்கும். வெள்ளி, பொன், ஆகியவற்றின் அடர்த்திகள் முறையே 10·5, 19·3 ஆயின் அவற்றின் தொடர்புத் திணிவுகள் என்ன ?

10. வளியில் பிளாற்றின நியம இருத்தல் நிறையைத் தராசுத் தட்டிற் சமப்படுத்தும் பித்தளை இருததல நிறை

$$\left(\frac{A}{B}-\frac{A}{P}\right)\Big/\left(1-\frac{A}{B}\right)$$

என்னும் பின்னத்தாற பெரிதாகுமென நிறுவுக; இங்கு A, B, P என்பன முறையே வளி, பித்தளை, பிளாறறினம் ஆகியவற்றின் தன்னீர்ப்புகள் ஆகும்.

11. ஒரு பொது நீரமானி நீரில் மிதக்கும்போது அதன் கனவளவில் $\frac{9}{10}$ பங்கும், பாலில் மிதக்கும்போது அதன் கனவளவில் $\frac{90}{103}$ பங்கும் உள்ளாழ்த்தப்படும். பாலின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க.

12. 1·24, 1·36 என்பனவற்றிற்கிடையே தன்னீாப்பை வாசித்தற்கு ஒருபொது நீரமானியின் குமிழானது காம்பினுடைய கனவளவின் $10\frac{1}{3}$ மடங்கு கனவளவுடையதாக வேண்டும் என நிறுவுக.

13. $3\frac{3}{4}$ அவுன்சு நிறையுள்ள ஒரு நிக்கல்சன் நீரமானியை நிலைத்த புள்ளிக்கு நீரில் ஆழ்த்தற்கு $1\frac{3}{4}$ அவுன்சு நிறை வேண்டும். 2·5 அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில் அதை நிலைத்த புள்ளிக்கு ஆழத்தற்கு யாது நிறை வேணடும்.

14. 142 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு மாககல் ஒரு நிக்கல்சன் நீரமானியின் மேற்றட்டில் இடப்பட்ட பின்னர் நீரமானியை காம்பின் ஒரு நிலைத்த புளளிக்கு ஆழ்த்தற்கு 40 கிராம் கூடுதலாக வேணடுமெனக காணப்படும். மாக்கல் கீழ்த் தட்டிலிடப்படுமிடத்து 90 கிராம் வேண்டுமெனக் காணப்படும். மாக்கல்லின் தன்னீர்ப்பு யாது ?

15. இரு புயங்களும் நிலைக்குததாகுமாறு நிலையாக்கப்பட்ட ஒரு U – குழாய் இரசத்தைக் (தன்னீர்ப்பு 13·6) கொண்டிருக்கும். A என்னும் ஒரு திரவம் குழாயின் இடதுகைப் புயத்துககுள் வார்க்கப்பட்டுத் திரவங்கள் ஓய்வுககு வந்தபின்னர், A என்னும் முழுத்திரவமும் இடதுகைப் புயத்திலிருகக A யின் சுயாதீனப் பரப்பும் இரசத்தின் சுயாதீனப் பரப்பும் இரு திரவங்களின் வேருக்கற் பரப்பிற்கு மேல் முறையே 35·3, 5·4 சமீ. உயரங்களிலிருககும். A என்னுந் திரவத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க.

அன்றியும் ஒவவொரு புயத்திலும் இரசம் ஒரே மட்டத்தில நிற்குமாறு வலதுகைப் புயத்தில உட்செலுத்த வேண்டிய B (தன்னீர்ப்பு 4·7) என்னும் மூன்ருவது திரவ நிரலின் உயரத்தைக் காணக. *(H. S. C., I.)*

16. 96 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு கலப்பு உலோகத் துண்டு இரண்டு உலோகங்களால் ஆக்கப் படும். ஒன்றின் தனனீர்ப்பு 11·4 ஆக மறறையதன தன்னீர்ப்பு 7·4 ஆகும். நீரிற் கலப்புலோகத்தின் நிறை 86 கிராமாயின், கலப்புலோகத்திலுள்ள ஒவ்வோர் உலோகத் தினது நிறையைக் காண்க. *(Inter. Sc.)*

17. ஒருடல் நீரில் நிறுக்கப்படும்போது 3 இரு. தோற்ற நிறையும், 0·8 தன்னீர்ப்புக் கொண்ட திரவத்தில் நிறுககப்படும் போது 3·1 இரு. தோற்ற நிறையும் உடையது. உடலின் நிறையையும், 0·6 தன்னீர்ப்புக்கொண்ட திரவத்தில் நிறுக்கப்படும்போது அதன் தோறற நிறையையும் காணக.

1 கன அடி நீர் 62·5 இரு. நிறையும், உடல் ஒரு சதுரமுகியும் ஆயின், அதன் ஓரத்தின் நீளததைக காண்க. *(H. S. C., I.)*

18. ஓர் இலேசான விறைப்புக் கோல் ACB, ஒரு கத்தி ஓரத்தின் மேல் C யிற் சமப்படுத்தப் படும். கோல் இடையாக இருக்குமாறு ρ_1, ρ_2 அடர்த்திகள் உள்ள P, Q என்னுஞ் சமனில்லாத் திணிவுகள் C யிலிருந்து x_1, y_1 என்னுந் தூரங்களிற் கோலுக்குத் தொடுக்கப்பட்ட நுண் கம்பிகளாலே தூக்கப்படும். P, Q என்பன σ_1, σ_2 அடர்த்திகள் உள்ள திரவங்களில் முற்றுய் உள்ளாழ்த்தப்படும்போது x_1 என்பதை மாறிலியாக வைத்துக்கொண்டு Q என்பதை C யிலிருந்து y_2 தூரததிற்கு அசைத்தலால் அல்லது y_1 என்பதை மாறிலியாக வைத்துககொண்டு P என்பதை C யிலிருந்து x_2 தூரத்திற்கு அசைத்தலால், கோலின் சமநிலே மீண்டும் பெறப்படும்.

(i) $x_1y_1 = x_2y_2$;

(ii) $\left\{1 - \dfrac{\sigma_1}{\rho_1}\right\}^2 \Big/ \left\{1 - \dfrac{\sigma_2}{\rho_2}\right\}^2 = x_1y_2 / x_2y_1$

என்பனவற்றை நிறுவுக. (*H. S. C., I.*)

19. ஒரு U – குழாயின் இரு கிளைகள் ஒன்ரேடொன்று நெருங்கியிருக்கும். அவற்றின் பொதுப் பரப்பு மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருககுமாறும், அவற்றின் மேற்பரப்புக்களின் உயர வித்தியாசம் d ஆகுமாறும் இரசம் ஒரு கிளையிலும் நீர் மற்றையதிலுங் கொள்ளப்படும். நீரின் $\frac{1}{n}$ பஙகு வெளியே எடுக்கப்பட்டு மற்றைக் கிளைக்குள் இரசத்தின் மேல் வார்க்கப்படுமாயின் சமநிலை கொள்ளப்படும். புதிய நிலையில் மேற்பரப்புக்களின் உயர வித்தியாசம் $(n-2)\,d\,/\,n$ எனக் காட்டுக.

விடை

1. 1·26.
2. 2·4.
3. 7·692.
4. 2.
5. 0·1935.
6. 1·5.
7. 13/18.
8. 3·6.
9. 1·00352 : 1.
11. 1·03.
13. 10 அவு. நிறை.
14. 2·84
15. 2·08 ; 15·6 சமீ.
16. 62·7 கிராம், 33·3 கிராம்.
17. 3·5 இரு. நிறை, 3·2 இரு. நிறை ; 2·4 அங்.

அதிகாரம் X

வாயுக்கள்

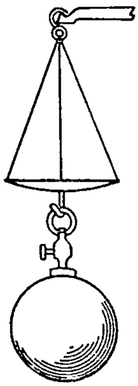
69. முன்னுரை

முன்னுள்ள அதிகாரங்களில் பொதுவாகப் பாயிகளைப்பற்றிப் பல தேற்றங் களை நாம் நிறுவியுள்ளோம். ஆனால், அவற்றின் பிரயோகம், முக்கிய மாகத திரவஙகளைக் குறித்தே நோக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வதிகாரம் வாயுக் களுக்காக ஒதுக்கபபட்டுள்ளது.

முதன் முதலாக, இதுவரை எமக்கு வாயுக்களைப்பற்றி யாது தெரியும் என எடுத்து நோக்குவோம். §17 இல, ஒரு திரவத்தில் யாதும் ஓர் ஆழத்திலுள்ள அமுக்கச் செறிவு பரப்பிலுளள வளிமண்டல அமுக்கத் தைச் சாருமெனக் கூறியுள்ளோம். இதை வேறு மாதிரிக் கூறின், அது திரவப் பரப்பில் நெருக்கும் வளியின் நிறையிற் சார்ந்திருக்கும். இவ்வளி மண்டல அமுக்கம் பற்றிக் கூடிய விவரமாய்ப் பின்னர் இவ்வதிகாரத்தில் நோக்குவோம்.

மறுபடியும், §52 இல் வாயுக்கள் திரவங்கள் ஆகிய எல்லாப் பாயிகளுக் கும் உண்மையாகும் ஆக்கிமிடீசின் கோட்பாட்டை நிறுவியுள்ளோம் ; இதன் பயனாக §57 இல் ஒருடல் பகுதியாய்த் திரவத்திலும் பகுதியாய் வாயுவிலும் உள்ளாழ்த்தப்படும்போது இடம் பெயர்க்கப்பட்ட வளிக்குரிய திருத்தத்தைக் கண்டுள் ளோம். பின்னர் ஒரு திண்மத்தை **வெற்றிடத்தில்** நிறுக்காது வளியில் நிறுக்கும்போது இடம் பெயர்க் கப்பட்ட வளிக்குரிய திருத்தத்தைத் துணிதற்கு இது §64 இற் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இங்கு வளியின் தனனீர்ப்பு 0·0013 என எடுக்கப்பட்டது. அதாவது, ஒரு கன அடி நீர 62·5 இரு. அல்லது 1,000 அவு. என எடுத்துக்கொள்ளுமிடத்து

$$1 \text{ கன அடி வளியின் நிறை} = 0{\cdot}0013 \times 1000 \text{ அவு.} = 1{\cdot}3 \text{ அவு.}$$



படம் 126

70. வளியின் அடர்த்தியைக் காணல்

நாம் வளியின் அடர்த்தியைக கூறினபோதிலும், இதைத் துணிதறகு ஒரு பரிசோதனையை நாம் விளக் கிக் கூறவில்லை. இதனை இப்போது செய்வோம் :—

ஒரு திருகுபிடி அல்லது குழாயடைப்பு பொருத்தப்பட்ட ஒரு பெரிய கண்ணாடிக் குடுவை எடுக்கப்படும். அதற்குள் உள்ள வளி ஒரு வளிப் பம்பியால் முற்றாய ஒழிக்கப்பட்டுத் திருகுபிடியால் அடைக்கப்படும்.

பினனர் குடுவை ஒரு தராசால் நிறுக்கப்படும் (படம் 126). திருகுபிடி திறக்கப்படுமிடத்து வளி குடுவைக்குட் சென்று அதைக் காவும் தராசுத் தட்டைத் தாழ்த்தும்; ஆகவே குடுவை முன்னுள்ளதிலும் பார்க்கப் பாரமாகும், மீண்டும் நிறுததலாற் காணப்படும் நிறை வித்தியாசம் வெளிப்படையாக குடுவைக்குட் சென்ற வளியின் நிறையாகும். குடுவையின கனவளவு துணியப்படுமாயின் வளியின் அடர்த்தியும் தன்னீர்ப்பும் காணப் படலாம்.

உதாரணம். **வெறுமையாக 273·4 கிராம் நிறையுள்ள குடுவை வளியால் நிரப்பப்பட 276·5 கிராம் நிறையும், நீரால் நிரப்பப்பட 2658·4 கிராம் நிறையும் ஆகும். ஓர் இலீற்றர் வளியின் நிறையைக் காணல்.**

குடுவையிலுள்ள வளியின் நிறை $=276\cdot5-273\cdot4=3\cdot1$ கிராம்.

சமகனவளவுடைய நீரின் நிறை $=2658\cdot4-273\cdot4=2385$ கிராம்.

∴ வளியின் தன்னீர்ப்பு $=3\cdot1\div2385=0\cdot0013$,

ஆனல் ஓர் இலீற்றர் நீரின் நிறை 1000 கிராம்;

∴ ஓர் இலீற்றர் வளியின நிறை $=1\cdot3$ கிராம்.

வளி அமுக்கத்தை உஞற்றும் எனபதைக் காட்டும் தொடக்க காலத்து வழிகளுள் ஒனறை எடுத்து நோக்குதல் ஆர்வத்தையூட்டும். பதினேழாம் நூற்றுண்டில் மக்டிபேக்கைச் சேர்ந்த ஒறரோ வொன் கெறிக என்பவர், வளி போகாத தொடுப்பால் ஒருங்கு பொருத்தப்பட்ட இரு பொள் அரைககோளங்களை உருவாககினுர். இறுக்கமாகப் பொருந்தியிருக் கும் இவ்வரைக் கோளங்களிலிருந்து ஒரு வளிப் பம்பியால் வளி இழுக்கப்படுமிடத்து அவற்றை வேறுவேருகப் பிரித்தற்கு மிகப் பெரிய விசை வேண்டியதாகக் காணப்பட்டது. அரைக் கோளங்களின் வெளிப பரப்புகளில் வளிமண்டலத்தால் ஆக்கப்படும் விளையுள் உதைப்புக்களை வெல்தற்கு இவ்விசை வேண்டும். வளிமண்டல அமுக்கம் அண்ணளவாய் 14·7 இரு./சதுர அங். ஆகுமென முன்னர் கூறியுள்ளோம். ஆகவே, கோளததின விட்டம் தெரியுமாயின் வேண்டிய செப்பமான விசையை நாம் துணியலாம். அரைக் கோளங்கள் ஓர் அடி விட்டமுடையனவாயின் §50 இலிருந்து அரைககோளத்தின் வளைபரபபில் வளியின் விளையுள் உதைப்பு

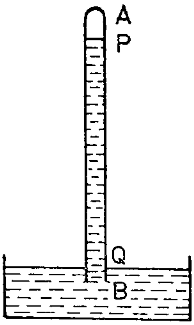
$$=\pi(6)^2\times14\cdot7 \text{ இரு. நிறை,}$$
$$=1663\cdot2 \text{ இரு. நிறை.}$$

ஆகவே, இரண்டு அரைக்கோளங்களையும் வேருக்கற்கு ஒவ்வோர் அரைக் கோளத்திலும் பிரயோகிக்கவேண்டிய மிகச் சிறிய விசை இதுவே.

71. வளிமண்டல அமுக்கத்தின் அளவீடு

1643 ஆம் ஆண்டிலேதான் வளிமண்டல அமுக்கத்தை அளத்தற்கு ஒரு பரிசோதனை தொரிசெலலி என்பவரால் ஏற்படுத்தப்பட்டது; இபபரி சோதனை பாரமானியின கணடுபிடிப்புக்கு வழிகாட்டியது.

இப்பரிசோதனையைச் செய்தற்கு அல்லது ஒரு பாரமானியை அதன் மிக எளிய வடிவத்தில் அமைத்தற்கு ஏறக்குறைய 33 அங்குல நீளமும் ஒரு முனை அடைக்கப்பட்டதுமான ஒரு கண்ணுடிக் குழாய் முற்றுய் இரசத்தால் நிரப்பப்படும். திறந்த முனை விரலால் அடைக்கப்பட்டுக் குழாய் ஓர் இரசக் கிண்ணத்தில் தலைகீழாக்கப்படும். அதன் பின்னர் குழாய்க்குள் வளி செல்லாவாறு விரல் நீக்கப்படும். இரசம் உடனடியாக ஆழ்ந்து குழாயின் உச்சியில் ஒரு தெளிவான வெளியைத் தரும். கிண்ணத்திலுள்ள இரசப் பரப்பிற்கு மேலுள்ள இரச நிரலின் உயரம் ஏறக்குறைய 30 **அங்குலம்** அல்லது 76 **சதம மீற்றர்** என்பது காணப்படும்.



படம் 127

AB (படம் 127) குழாயையும், P இரச மட்டத்தையுங் குறிக்குமெனை உத்தேசிக்க. ஒரு திரவத்தில் ஒரே மட்டத்திலுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் அமுக்கச் செறிவு ஒன்றே என §15 இல் நிறுவியுள்ளோம். ஆகவே, குழாய்க்குள் Q வில் அமுக்கச் செறிவு சுற்றியுள்ள இரசபரப்பிற் பெறப்படும் அமுக்கச் செறிவுக்குச் சமமாகும். அதாவது குழாய்க்குள் Q வில் அமுக்கச் செறிவு வளிமண்டல அமுக்கத்திற்குச் சமமாகும்.

இனி Q வில் குழாய்க்குள் உள்ள அமுக்கச் செறிவு, P யிலுள்ள அமுக்கச் செறிவாலும் PQ என்னும் இரச நீளத்தாலும் ஆக்கப்படும். ஆனுல் AP யானது வெற்றிடம். ஆதலால் P யில் அமுக்கச் செறிவு பூச்சியமாகும். ஆகவே PQ என்னும் நீளம் வளிமண்டல அமுக்கத்தை அளக்கும். உண்மையில் AP மிகச் சிறிய அளவு இரச ஆவியைக் கொண்டிருக்கும் ; ஆனுல் இது P யில் அற்பமான அமுககச் செறிவை ஆக்குதலால் நாம் இச்செறிவைப் பூச்சியமெனக் கொள்ளலாம்.

தெளிவின் பொருட்டு, நீளம் PQ, 30 அங்குலமாக இருக்கும்போது வளிமண்டல அமுக்கத்தை நாம் துணிய விரும்புவதாக உத்தேசிக்க.

ஒரு சதுர அங்குலத்தில் வளிமண்டலத்தின் அமுக்கம்

=1 சதுர அங்குல அடியில் 30 அங்குல உயரமுள்ள இரச நிரலின் நிறை.

=30 கன அங்குல இரசத்தின் நிறை.

$=13{\cdot}6\times$(30 கன அங்குல நீரின் நிறை).

(இரசத்தின தன்னீர்ப்பு 13·6 எனக கொண்டு)

$=13{\cdot}6\times30\times\frac{62{\cdot}5}{12^3}$ இரு. நிறை .

=14·75 இரு. நிறை.

அதாவது, 30 அங்குல இரசத்திற்கு ஒத்த வளிமண்டல அமுக்கம் சதுர அங்குலத்திற்கு 14·75....இரு. நிறையாகும்.

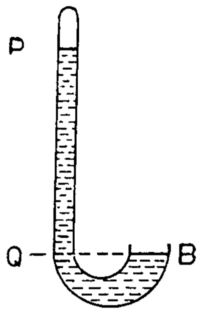
உண்மையில் நீளம் PQ தொடர்ந்து மாறுதலால் வளிமண்டல அமுக்கம் என்றும் சிறிதளவு மாறிக்கொண்டிருக்கும் என்பதை இது காட்டும். வானிலையில் ஏற்படும் சில மாற்றங்கள், வளிமண்டல அமுக்கத்தில் ஏற்படும் சில மாற்றங்களோடு பொதுவாக இணையுமென அனுபவம் காட்டுதலால், வளிமண்டல அமுக்கத்தில ஏற்படும் இச்சிறு மாற்றம் வானிலையை முன்னறிவிக்க உபயோகிக்கப்படலாம். உதாரணமாக, மழை காலம் பொதுவாக வளிமண்டலவமுக்க இறக்கத்தால் முன்னதாகவே காட்டப்படும். வானிலையில் திருததம் பொதுவாக வளிமண்டலவமுக்க ஏற்றத்தோடு பொருந்தும்.

72. பாரமானிகள்

வளிமண்டல அமுக்கத்தை அளத்தற்கு ஏற்படுத்தப்படும் எக்கருவியும் பாரமானி எனப்படும். அதன் மிக எளிய வடிவத்தில் § 71 இல் விளக்கிக் கூறியதுபோலுள்ள இரசங்கொண்ட ஒரு குழாயால் அது ஆக்கப் படும். இக்குழாயில் இரச நிரலின உயரத்தை அளததற்கு ஒரு அளவிடை தொடுக்கப்படும். இரசம் உயர்ந்த தன்னீர்ப்பை உடையதாதலால் இக் கருவிக்கு இசைவாகும் ; பாரமானி ஏறக்குறைய 34 அஙகுல நீளமுள்ள தாக மாத்திரமே இருத்தல் வேணடும். வேறு திரவங்கள் வழங்குமிடத்து பாரமானி கூடுதலான உணாதிறனை உடையபோதிலும் மிகப் பெரிதாகும். நீரை வழங்குமிடத்து 30 அங்குல இரசத்திறகு ஒதத நீர் நிரலின் நீளம் $30\times13{\cdot}6$ அங். அல்லது 34 அடி ஆகும்.

நீர் வெற்றிடத்திற் சுயாதீனமாக ஆவியாகுதலாற் குழாயின் உச்சியில் ஒரு வெற்றிடத்தைச சேமிக்கும இடர்ப்பாடு நீரப் பாரமானிக்கு மற்றுமொரு எதிர்ப் பாகும். கிளிசறீனுக்கு இக்குறையில்லை ; அதன் தன்னீர்ப்பு 1·26 ஆதலால் கிளிசறீன பாரமானியின் உணர்திறன் இரசப் பாரமானியின் உணர்திறனின பத்து மடங்கிலும் பெரிதாகும்.

சமனில்லாப் புயங்களும், சமனில்லா விட்டங்களும் உளள U-குழாயே ஓர் இரசப் பாரமானிக்கு மிக இசைவான வடிவமாகும் (படம் 128).



படம் 128

குறு புயத்திலுள்ள இரசம் வளிமண்டலத்திற்குத் திறநதிருக்க, உயர வித்தியாசம் (PQ), வளிமண்டல அமுக்கத்தைத் தன் நிறையால அளக்கும் இரச நிரலின் நீளத்தைத் தரும். இவவகை **இறையி பாரமானி** எனப்படும்.

பாரமானியின் வேறொரு பயன்படும் வடிவம் **திரவமில் பாரமானி** எனப்படும். இது வளி ஒழித்த, அல்லது ஏறக்குறைய ஒழித்த, ஒரு

பொள் உலோகப் பெட்டியாகும். வளிமண்டல அமுக்கம் பெட்டியின் உச்சியை உள்நெருக்க நாடியபோதிலும், உலோகத்தின் மீள்தன்மை இதற்குத் தடையாகி உலோகம் ஒரு வில்போல் வேலை செய்யும். அமுக்கம் அதிகரிக்குமிடத்து அல்லது குறையுமிடத்து மூடி சற்றே ஆழ்ந்து அல்லது எழுந்து ஒரு முகப்பில் அமுக்கத்தைக் காட்டும் ஒரு காட்டியை இயக்கும். இரசப் பாரமானியின் வாசித்தலுக்கு ஒத்திருக்குமாறு இம்முகப்பு " அங் குலங்களில் " அல்லது " மில்லி மீற்றர்களில் " படிவகுக்கப்படும். திரவமில் பாரமானி அதன் கையடக்கம் காரணமாகவே முக்கியமாய் உபயோகிக்கப் படும்.

73. போயிலின் விதி

மாரு வெப்பநிலையில் ஒரு வாயுவின் கனவளவுக்கும் அமுக்கத்திற்கும் உள்ள தொடர்பைத் தரும் இப்பரிசோதனைமுறை விதி ரெபெட் போயில் என்பவரால் 1662 ஆம் ஆண்டில் வெளியாக்கப்பட்டது. இதனைச் சாராத முறையில் பிராஞ்சு தேசத்தில் மறியற் என்பவரால் 1679 ஆம் ஆண்டில் வெளியாக்கப்பட்டது. அது பினவருமாறு :—

தந்த ஒரு திணிவுள்ள வாயுவின வெப்பநிலை மாருதிருக்குமிடத்து, அதன் அமுக்கம் கனவளவோடு நோமாருய் மாறும் ; அதாவது p, v என்பன முறையே அமுக்கம், கனவளவு, என்பனவற்றைக் குறிக்குமாயின்,

$$p \propto \frac{1}{v},$$

அதாவது
$$p = \frac{1}{v} \times \text{மாறிலி},$$

அல்லது
$$pv = \text{மாறிலி}$$

வேறுமாதிரிக் கூறின, ஒரு திணிவுள்ள வாயு p_1 அமுக்கத்தில் v_1 கனவளவும், p_2 அமுக்கத்தில் v_2 கனவளவும், p_3 அமுக்கத்தில் v_3 கனவளவும் வேறும் இவவாறே உடையதாயின்,

$$p_1v_1 = p_2v_2 = p_3v_3 = \dots$$

போயிலின் விதி பரிசோதனைமுறையாய்ச் சரிபார்க்கும் முறை § 74 இல் தரப்படும்.

உதாரணம் 1. **வளிமண்டல அமுக்கத்தில் ஒரு திணிவுள்ள வாயு 44 கன அங்குல இடத்தைக் கொள்ளும். ஒரு வளிமண்டலம் சதுர அங்குலத்திற்கு 15 இரு. எனக் கொண்டு கனவளவு 24 கன அங்குலத்திற்கு ஒடுக்கப்படுமிடத்து அமுக்கச் செறிவைக் காணல்.**

p யானது, சதுர அங்குலத்திற்கு இருத்தலில், வேண்டிய அமுக்கச் செறிவைக் குறிக்க. ஆயின், போயிலின விதியின்படி

$$p \times 24 = 44 \times 15 ;$$

$$\therefore \quad p = \frac{44 \times 15}{24} = \frac{11 \times 5}{2} = 27\tfrac{1}{2} \text{ இரு. சதுர அங்குலத்திற்கு.}$$

உதாரணம் 2. ஒரு வளிக்குமிழி ஒரு குளத்தின் அடியிலிருந்து எழுந்து பரப்பை அடையும் போது அதன் விட்டம் இரட்டிக்கும். குளத்தின் ஆழத்தைக் காணல்.

ஒரு கோளத்தின் கனவளவு அதன் விட்டத்தின் முப்படிக்கு விகித சமமாகும்.

[$\because$ கனவளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi$ (விட்டம்)^3].

$\therefore$ பரப்பிலுள்ள கனவளவு = அடியிலுள்ள கனவளவின் 8 மடங்கு. ஆகவே போயிலின் விதியால்,

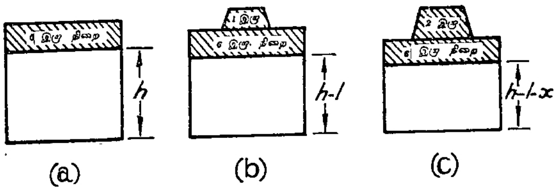
பரப்பில் அமுக்கம் = அடியிலுள்ள அமுக்கத்தின் $\frac{1}{8}$ பங்கு;

$\therefore$ அடியில் அமுக்கம் $= 8$ வளிமண்டலம்.

நீர்ப் பாரமானியின் உயரம் 34 அடி எனக் கொள்ளப்படுமாயின் ஒவ்வொரு 34 அடி ஆழத்திற்கும் அமுக்கம் 1 வளிமண்டலத்தால் அதிகரிக்கும். ஆனல் உச்சியிலும் அடியிலும் அமுக்க வித்தியாசம் 7 வளிமண்டலம்.

$\therefore$ குளத்தின் ஆழம் $= 34 \times 7 = 238$ அடி.

உதாரணம் 3. வாயு கொண்டதும் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் உள்ள ஓர் உருளை, அதன் உச்சியில் 6 இருத்தல் நிறைகொண்ட ஒரு வழுக்கும் முசலத்தால் அடைக்கப்படும். முசலத்தின் உச்சியில் 1 இருத்தல் நிறை இடப்படும்போது முசலம் 1 அங்குல தூரம் ஆழும். கூடுதலாக 1 இருத்தல் நிறை இடப்படும்போது எவ்வளவு தூரம் இன்னும் ஆழுமெனக் காண்க. (வளிமண்டல அமுக்கத்தைப் புறக்கணிக்க). [*Inter. Eng.*]



படம் 129

வாயு அறையின் நீளம h அங்குலமாகிக குறுக்குவெட்டு s சதுர அஙகுலமாகுக.

படம் 129 மூன்று வகைகளையுங் குறிக்குமெனக் கொள்க. தொடக்கத்தில், படம் 129 (a), வாயுவின கனவளவு sh கன அங்குலமாகி மொத்த அமுக்கம் 6 இரு. நிறை ஆகும்.

ஆயின், தொடக்கத்தில்,

$$\text{அமுக்கம்} \times \text{கனவளவு} = 6sh \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i).$$

இரண்டாவது வகையில், படம் 129(b), கூடுதலாக 1 இருத்தல் நிறை இடப்படும்போது மொத்த அமுக்கம் 7 இரு. நிறையும் கனவளவு $s(h-1)$ கன அஙகுலமுமாகும்.

ஆகவே, $$\text{அமுக்கம்} \times \text{கனவளவு} = 7s\ (h-1) \quad \ldots\ldots\ldots (ii).$$

மூன்றாவது வகையில், படம் 129(c), மொத்த அமுக்கம் 8 இரு. நிறையும் மொத்தக் கனவளவு $s(h-1-x)$ கன அங்குலமும் ஆகும்; இங்கு x அங்குலம் கூடுதலாகத் தாழ்த்தப்பட்ட தூரமாகும்.

இங்கு, அமுக்கம் $\times$ கனவளவு $= 8s(h-1-x)$ ....(iii).

போயிலின் விதியிலிருந்து (i), (ii), (iii) என்பன ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்;

$$\therefore \quad 6sh = 7s(h-1) = 8s\ (h-1-x).$$

முதல் இரண்டு தொடர்புகளிலிருந்து

$$6h = 7h - 7;$$

$$\therefore \quad h = 7 \text{ அங்.}$$

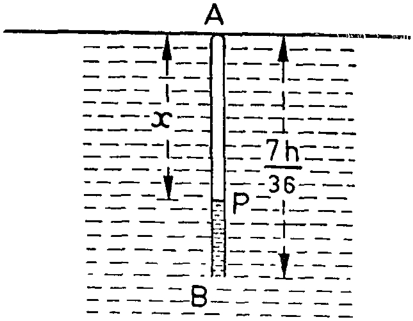
அன்றியும் முதற்றொடர்பிலும் கடைசித் தொடர்பிலுமிருந்து

$$6h = 8\ (h-1-x),$$

$$6 \times 7 = 8\ (6-x);$$

$$\therefore \quad x = \tfrac{3}{4} \text{ அங்.}$$

உதாரணம் 4. ஒரு முனை அடைத்தும் மற்றையது திறந்தும் இருக்கும் ஒரு சீரான நேர்க் குழாய், அதன் அடைத்த முனை மட்டாகக் கீழாழ்த்தப்படும்வரை இரசம்கொண்ட ஒரு பாண்டத்துள் நிலைக்குத்தாய்த் தாழ்த்தப்படும். இரசப் பாரமானியின் உயரம் h ஆகிக் குழாயின் நீளம் $7h/36$ ஆயின் இன்னும் வளியைக் கொண்டிருக்கும் குழாயின் நீளத்தைக் காண்க. (*Inter. Sc.*)



படம் 130

AB (படம் 130) யானது A என்னும் அடைத்த முனை இரசப் பரப்பில் இருக்குமாறுள்ள குழாயைக் குறிக்க. இரசம் குழாய்க்குள் P யிற்கு எழுமென உத்தேசிக்க. $AP = x$ ஆகிக் குழாயின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பளவு s ஆகுக. இரசம் குழாய்க்குள் எழுந்ததால் தொடக்கத்தில் $\left(\dfrac{7hs}{36}\text{ கனவளவுள்ள}\right)$ குழாயை நிரப்பிய வளி xs கன வளவுக்கு நெருக்கப்பட்டுள்ளது. இரசப்பாரமானியின் உயரம் h ஆதலால் இது வளிமண்டல அமுக்கத்தின், அதாவது குழாய்க்குள் தொடக்க வளி அமுக்கத்தின் அளவாக எடுக்கப்படலாம். குழாய் கீழாழ்த்தப்படும்போது குழாய்க்குள் வளியமுக்கம் P யிலுள்ள அமுக்கச் செறிவாகும்; இது இரசத்தில் அதே மட்டத்திலுள்ள யாதும் ஒரு புள்ளியில அமுக்கச் செறிவாகும். அதாவது,

P யில் அமுக்கச் செறிவு $= x + h$.

ஆயின், தொடக்க அமுக்கம் × கனவளவு $= h. \frac{7hs}{36}$ ....(i);

இறுதி அமுக்கம் × கனவளவு $= (x+h)\, xs$ ....(ii)·

போயிலின் விதியிலிருந்து நாம் (i), (ii) என்பனவற்றைச் சமப்படுத்தலாம்.

$$\therefore\ xs\ (x+h) = h.\ \frac{7hs}{36};$$

$$\therefore\ 36x^2 + 36xh - 7h^2 = 0;$$

$$\therefore\ (6x - h)\ (6x + 7h) = 0,$$

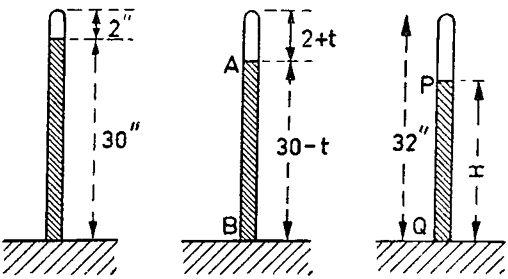
சாத்தியமான ஒரே தீர்வு $6x - h = 0$ என்பதாலே தரப்படும்.

அதாவது $$x = \frac{h}{6}.$$

உதாரணம் 5. ஓர் இரசப் பாரமானியின் உயரம் 30 அங். ஆகும். இரசத்தின் மேலுள்ள உருளைவடிவான வெற்றிடத்தின் நீளம் 2 அங். ஆகும். வளிமண்டல அமுக்கத்தில் பாரமானிக் குழாயின் அரை அங்குல இடத்தைக் கொள்ளக்கூடிய ஒரு வளிக் குமிழி குழாய்க்குட் செலுத்தப்படும். பாரமானியின் புதிய உயரம் 27 அங். என நிறுவுக.

அன்றியும் (மேற்றந்த அளவு வளியைக்கொண்ட) பாரமானி x அங். காட்டும்போது உண்மையான உயரம் $\left(x + \frac{15}{32 - x}\right)$ அங். என நிறுவுக.

(*Inter. Sc.*)



படம் 131

குழாயின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு s சதுர அங். ஆகுக.

வளிக் குமிழி உட்சென்றபின் இரசத்தின் மேலுள்ள தூரம் $2 + t$ அங்குலத்திற்கு அதிகரிக்கப்படுக [படம் 131 (b)]. ஆயின் இரசநிரலின் நீளம் $30 - t$ அங். ஆகும்.

தொடக்கத்தில் வளிக்குமிழியின் கனவளவு $\frac{1}{2}s$ கன அங். ஆகி, அமுக்கம் 30 அங்குல இரசமாகும்.

வளிக் குமிழி வெற்றிடத்துக்குச் சென்றதும் $(2+t)s$ கன அங்குலக் கனவளவைக் கொள்ளும். அப்போது அதன் அமுக்கம் p ஆகுக. ஆயின் போயிலின் விதியிலிருந்து,

$$\tfrac{1}{2}\, s .\, 30 = ps\,(2+t)\ ;$$

$$\therefore\ p = \frac{15}{2+t}.$$

இது குழாயின் உச்சியிலுள்ள ஒழியமுக்கமாகி A யிலுள்ள அமுக்கச் செறிவாகும்.

$\therefore$ B யில் அமுக்கச் செறிவு

= இரச நிரலின் நீளம் + A யில் உள்ள அமுக்கச் செறிவு.

$$= 30 - t + \frac{15}{2+t}.$$

B யிலுள்ள அமுக்கச் செறிவு வளிமண்டலத்திற்கு உரியதாதலால்,

$$30 = 30 - t + \frac{15}{2+t}\ ;$$

$$\therefore\ t = \frac{15}{2+t}\ ;$$

$$\therefore\ t^2 + 2t - 15 = 0\ ;$$

$$\therefore\ (t+5)\,(t-3) = 0\ ;$$

$\therefore$ $t=3$ என்பது மட்டுந்தான் சாத்தியமான தீர்வு ;

$\therefore$ பாரமானியின் புதிய உயரம் $= 30 - 3$ அங்.

$= 27$ அங்.

பிழையான பாரமானியின் வாசித்தல் x அங். ஆகுமிடத்து, படம் 131 (c), வளியின் கனவளவு $(32-x)\,s$ கன அங். ஆகும் ; அமுக்கம் p ஆயின் முன்போல,

$$ps(32-x) = \tfrac{1}{2}s\, .\, 30,$$

அல்லது

$$p = \frac{15}{32-x}.$$

ஆயின் பாரமானியின் உண்மையான உயரம்

= Q விலுள்ள அமுக்கச் செறிவு

= x + P யிலுள்ள அமுக்கச் செறிவு

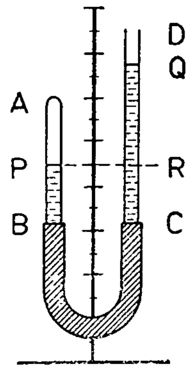
$= x + p$

$= x + \dfrac{15}{32-x}$ அங்.

74. போயிலின் விதியை பரிசோதனைமுறையாய்ச் சரிபார்த்தல்

போயிலின் விதியைப் பின்வருமாறு பரிசோதனை முறையில் சரிபார்க்கலாம் :—

வளையக்கூடிய இரப்பர் குழாயாலே தொடுக்கப்பட்ட AB, CD (படம் 132) என்னும் இரு கண்ணுடிக்குழாய்கள், நிலைக்குத்தான அளவிடை பொருத்தப்பட்ட ஒரு நிலைக்குத்தான தாளியில் நிலையாகப் பொருத்தப்படும். இரப்பர் குழாயுங் கண்ணுடிக் குழாய்களும் P, Q என்பனவற்றிற்கிடையே இரசத்தைக் கொள்ளும், AB யின் மேற்பக்கத்தில் வளி அடைக்கப்படும். அடைக்கப்பட்ட வளியின் அமுககம், கனவளவு, என்பன வற்றை மாற்றக்கூடியவாறு CD என்னுங் குழாய் மேலுங் கீழும் நிலைக்குததாய் வழுக்கும். யாதும் ஒரு நிலையில், AB யிலுள்ள வளியின கனவளவு AP யின் நீளத்திற்கு விகிதசமமாகி, இவ்வளியில் அமுக்கம் P யிலுள்ள அமுக்கச் செறிவாகும். இரசப் பாரமானியின் உயரம் h ஆயின்



படம் 132

$$\text{P யில் அமுக்கச் செறிவு} = \text{R இல் அமுக்கச் செறிவு}$$
$$= h + \text{QR}.$$

AP யானது $h + \text{QR}$ என்பதற்கு நேர்மாறுமுறை விகிதசமமாகுமெனப் பரிசோதனை முறையாற காணப்படும்.

அ—து $\qquad \text{AP}\,(h + \text{QR}) = \text{மாறிலி},$

அ—து, கனவளவு × அமுக்கம் = மாறிலி.

வேறு யாதும் வாயுவுக்கு போயிலின் விதியைச் சரிபார்த்தற்கு, AB என்னுங் குழாயில் வளிக்காக இவ்வாயுவைப் பிரதியிடல் மாத்திரம வேண்டியதாகும்.

75. ஒரு வாயுவின் அமுக்கம், அடர்த்தி, வெப்பநிலை ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்புகள்

ஒரு திணிவுள்ள வாயு p_0 என்னுந் தொடக்க அமுக்கத்தையும் v_0 என்னுந் தொடக்கக் கனவளவையும் ρ_0 என்னுந் தொடக்க அடர்த்தியையும் உடையதெனவும் ; ஏதாவதொரு பிற்பட்ட நிலையில் வெப்பநிலையை மாற்ருது அமுக்கத்தையோ கனவளவையோ மாற்றுமிடத்துப் இப்பெறுமானங்கள் p, v, ρ ஆக உள்ளன எனவும் உத்தேசிக்க.

ஆயின் போயிலின் விதிப்படி,

$$p_0 v_0 = pv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}.$$

வாயுவின் திணிவு மாருதிருக்க வேண்டுமாதலால்,

$$\rho_0 v_0 = \rho v \quad \text{.........................(ii)},$$

என்பதும் பெறப்படும்.

(i) என்பதை (ii) ஆல் வகுக்க,

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho} \quad \text{.........................(iii)}.$$

ஆகவே, தந்த ஒரு வாயுவுக்கு $\frac{p}{\rho}$ மாறிலியாகும் ; அதாவது,

$$p = c\rho \text{.........................(iv)}.$$

இங்கு, c ஒரு மாறிலியாகும்.

வேறுமாதிரிக் கூறின், தந்த வெப்பநிலையில் ஒரு தந்த இனமுடைய வாயுவின் அமுக்கமானது அதன் அடர்த்திக்கு விகிதசமமாகும்.

இனி, அமுக்கம் மாறிலியாக இருக்க வெப்பநிலை மாற்றப்படுமிடத்துக் கனவளவில் மாற்றம் உண்டாகும். ஏனெனில் வெப்பநிலையில் ஏற்படும் அதிகரிப்பு வாயுவை விரியச் செய்யும. கனவளவுகளுக் கிடையே உள்ள தொடர்பு பரிசோதனைமுறையில் ஜே. சாள்ஸ் எனபவரால் 1787 ஆம் ஆண்டில் வெளியாககப்பட்டுச் **சாள்சின் விதி** எனப்படும் ; அது பின்வருமாறு கூறப்படலாம் :—

ஒரு தந்த திணிவுள்ள வாயுவின் அமுக்கம் மாறிலியாக வைக்கப்படு மாயின அதன வெப்பநிலையின் ஒவ்வொரு 1°ச. அதிகரிப்புக்கும் அதன் கனவளவு 0°ச. இல் உள்ள கனவளவின் ஒரு குறிப்பிட்ட பின்னத்தால் அதிகரிக்கும்.

ஆயின், v ஆனது t°ச. இல் ஒரு தந்த திணிவுள்ள வாயுவின் கன வளவும, v_0 ஆனது 0°ச. இற் கனவளவுமாயின் ஒவ்வொரு சதமப் படிப் பாகைக்கும் கனவளவில அதிகரிப்பு αv_0 ஆகும் ; இங்கு α வானது ஒரு மாறிலியாகும் ; அதாவது,

t°ச. இற்குக் கனவளவு அதிகரிபபு $= \alpha v_0 t$;

$$\therefore \; v = v_0 + \alpha t v_0$$
$$= v_0 (1 + \alpha t) \quad \text{..................(v)}.$$

ρ_0, ρ என்பன முறையே 0°ச., t°ச. என்பனவற்றிலுள்ள அடர்த்திகளா யின, (ii) இலிருந்து (திணிவு மாருதிருத்தலால் இது இப்போதும் உண்மை யாகும்),

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{v}{v_0}, \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

ஆகவே (v) தருவது

$$\rho_0 = \rho\,(1 + \alpha t) \text{..................(vi)}.$$

வளிக்கும், பல வாயுகளுக்கும், α வானது பரிசோதனை முறையில் அண்ணளவாக $\frac{1}{273}$ எனக் காணப்பட்டுள்ளது. (iv) ஆம் சமன்பாட்டிலிருந்து வெப்பநிலை மாறிலியாயின், அடர்த்தி அமுக்கத்திற்கு விகித சமமெனப் பெறுவோம்.

அதாவது, t மாறிலியாயின்,

$$\rho \propto p \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(vii)}.$$

அன்றியும் (vi) இலிருந்து அமுக்கம் மாறிலியாயின் அடர்த்தி $(\rho)=\rho_0/(1+\alpha t)$; ρ_0 வாயுவுக்கு மாறிலியாதலால்,

p மாறிலியாகுமிடத்து, $$\rho \propto \frac{1}{1+\alpha t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(viii)}$$

என நாம் எழுதலாம்.

(vii), (viii) என்னும் இவ்விரு தொடர்புகளிலிருந்து ρ, p, t என்பன மாறக்கூடியதாயின் இவற்றிற்கிடையே ஒரு தொடர்பை நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

(vii) என்பதை,

$$\rho = p \times t \text{ இன் ஒரு சார்பு}$$
$$= p \times f(t), \text{ என்க, } \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(ix)}$$

என நாம் எழுதலாம் ; ஏனெனின் t மாறிலியாகுமிடத்து $f(t)$ மாறிலியாகும். எனின் (vii) ஆம் தொடர்பைப் பெறுவோம்.

இதேபோல (viii),

$$\rho = \frac{1}{1+\alpha t} \times p \text{ யின் ஒரு சார்பு}$$
$$= \frac{1}{1+\alpha t} \times \phi(p), \text{ என்க, } \dots\dots\dots\dots\dots \text{(x)}.$$

என எழுதப்படலாம் ; (ix), (x) என்பனவற்றைச் சமன்படுத்த,

$$\frac{\phi(p)}{1+\alpha t} = p\, f(t),$$

அதாவது $$\frac{\phi(p)}{p} = (1+\alpha t)\, f(t) ;$$

அதாவது p யை மாத்திரம் கொண்ட ஒரு சார்பு t யை மாத்திரம் கொண்ட ஒரு சார்புக்குச் சமனாகும். ஒவ்வொரு பக்கமும் மாறிலியாகுமிடத்தே இது சாத்தியமாகும். இம்மாறிலி $\frac{1}{k}$ ஆகுக.

ஆயின் $$\phi(p) = \frac{p}{k},\ f(t) = \frac{1}{k(1+\alpha t)} ;$$

∴ (ix) அல்லது (x) தருவது,

$$\rho = \frac{p}{k(1+\alpha t)},$$

அ—து. $$p = k\rho(1+\alpha t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(xi)};$$

p, ρ, t என்பன மாறக்கூடியதாயின் அவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு இதுவாகும்.

வெப்பம், அமுக்கம் ஆகியவற்றின் எல்லா வீசசுகளுக்கும் போயிலின விதியும், சாள்சின் விதியும் செப்பமாய் உண்மையாகாது என்பது கவனிக்கப் படவேண்டும். " நிறை பாயி " என்பதற்கு ஒப்பான " நிறை வாயு " என்னும் எண்ணக்கரு இங்கு அறிமுகப்படுத்தப்படுகிறது. இதற்கு வாயு விதிகள் எல்லா வீச்சுக்களிலும் உண்மையாகுமெனக் கொள்ளப்படும். அமுக்கத்தை மாறியாக வைத்துக்கொண்டு அத்தகைய ஒரு நிறை வாயு 0°ச. இற்கும் கீழ் குளிர்ச்சியாக்கப்படுமாயின், (v) இலிருந்து,

$$1 + \alpha t = 0,$$

அ—து. $$t = -\frac{1}{\alpha} = -273$$

என்பதாலே தரப்படும் t என்னும் வெப்பநிலையில், அதன் கனவளவு அறிமுறையில் மறையும்.

-273°ச. என்னும் வெப்பநிலை **தனிப் பூச்சியம்** எனப்பட்டு, இப்பூச்சியத் திலிருந்து அளக்கப்படும் வெப்ப நிலை **தனி வெப்பநிலைகள்** எனக் கூறப் படும். T என்பது தனி வெப்பநிலையைக் குறிக்குமாயின் t°ச. ஆனது தனி அளவிடையில் $273+t$ என்பதற்கு சமானம் ஆதலால்,

$$\mathrm{T} = 273 + t$$
$$= \frac{1}{\alpha} + t;$$

∴ **(xi)** ஆம் சமன்பாடு

$$p = k\rho(1+\alpha t)$$
$$= k\rho\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right)$$
$$= k\rho\alpha \mathrm{T};$$
$$\therefore \frac{pv}{\mathrm{T}} = k\rho\alpha v$$

என எழுதப்படலாம்.

$\therefore$ v, தந்த திணிவுள்ள வாயுவின் கனவளவாயின்,

$$= k\alpha . \rho v$$

$$= k\alpha \times (\text{வாயுவின் திணிவு})$$

$$= \text{மாறிலி, R என்க ;}$$

ஆயின் $$pv = RT \qquad \text{(xii).}$$

ஆகவே ஒரு தந்த திணிவுள்ள வாயுவினது அமுக்கம், கனவளவு என்பனவற்றின் பெருக்கம் அதன் தனி வெப்பநிலைக்கு விகிதசமமாகும்.

உதாரணம் 1. 1000 சமீ^{3}. கொள்ளளவுள்ள ஓர் அடைத்த பாண்டத்தில் ஒரு கிலோக் கிராம் வளி கொள்ளப்படும். வளிமண்டல அடர்த்தி 0·00129 கிராம்/சமீ.^{3} எனக் கொண்டு இவ்வளியின் அமுக்கம் வளிமண்டல அமுக்கத்திற்குக் கொள்ளும் விகிதத்தைக் காண்க. (*Inter. Sc.*)

அடைத்த பாண்டத்தில் வளி 1000 கன சமீ. கனவளவும் 1 கிலோ கிராம் நிறையும் உடையதாதலால் அதன் அடர்த்தி 1 கிராம்/சமீ.^{3} ஆகும். வளிமண்டல அடர்த்தி 0·00129 கிராம்/சமீ.^{3} ஆதலால்,

அடர்த்திகளின் விகிதம் 1 : 0·00129,

அல்லது 100,000 : 129 ஆகும்.

$\therefore$ (iv) என்னுஞ் சமன்பாட்டிலிருந்து,

அமுக்கங்களின் விகிதமும் 100,000 : 129 ஆகும்.

உதாரணம் 2. 10°ச. இல் ஒரு திணிவுள்ள வாயுவின் கனவளவு 250 கன சமீ. ஆகும். அமுக்கம் மாறுதாயின், யாது வெப்பநிலையில் அதன் கனவளவு 300 கன சமீ. ஆகும்.

சாள்சின் விதி, சமன்பாடு (v) இல் இருந்து,

$$250 = v_0 (1 + 10\alpha),$$

$$300 = v_0 (1 + t\alpha),$$

இங்கு t°ச. வேண்டிய வெப்பநிலையாகும். இரண்டாவது சமன்பாட்டை முதலாவதால் வகுக்க,

$$\frac{300}{250} = \frac{(1 + t\alpha)}{(1 + 10\alpha)},$$

அல்லது $$6 (1 + 10\alpha) = 5 (1 + t\alpha) ;$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{5\alpha} + 12$$

$$= 66{\cdot}6°\text{ச.}; \quad \alpha = \tfrac{1}{273} \text{ ஆதலால்.}$$

உதாரணம் 3. ஒரு தந்த அமுக்கத்திலுள்ள ஒரு திணிவுள்ள வளி 39°ச. வெப்பநிலையில் 24 கன அங்குல இடத்தைக் கொள்ளும். அமுக்கம் 3:4 என்னும் விகிதத்திற்குக் குறைக்கப்பட்டு வெப்பநிலை 78°ச. இற்கு ஏற்றப்பட்டுமாயின் வளியின் கனவளவு 36 கன அங்குலமெனக் காட்டுக.

p யானது தொடக்க அமுக்கமும், ρ_1 ஆனது தொடக்க அடர்த்தியுமாகுக. ஆயின் சமன்பாடு (xi) இல் இருந்து,

$$p = k\rho_1 (1 + 39\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}.$$

இரண்டாம் வகையில் கனவளவு v ஆகுக ; அமுக்கம் $\frac{3}{4}p$ எனத் தரப் பட்டுள்ளது, அடர்த்தி ρ_2 ஆகுக.

ஆயின் $$\tfrac{3}{4}p = k\rho_2 (1 + 78\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}.$$

(i) என்பதை (ii) ஆல் வகுக்க,

$$\frac{4}{3} = \frac{\rho_1 (1 + 39\alpha)}{\rho_2 (1 + 78\alpha)}$$

$$= \frac{312\rho_1}{351\rho_2}, \quad \alpha = \frac{1}{273} \text{ ஆதலால்.}$$

அன்றியும் திணிவு மாறிலியாதலால்

$$24\rho_1 = v\rho_2 \; ;$$

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{312v}{351.24} \; ;$$

$$\therefore v = 36 \text{ கன அங்.}$$

76. வாயுக்களின் கலவை

வேறுவேருன கனவளவுகள் உள்ள அடைத்த பாண்டங்களுக்குட் கொள் ளப்படும் இரு வேறுவேருன வாயுக்கள் ஒரே அமுக்கமும் ஒரே வெப்ப நிலையும் உடையன என உத்தேசிக்க. இரு பாண்டங்களுக்குமிடையே தொடர்பு ஏற்படுத்தப்படும்போது யாதும் இரசாயனத் தாக்கம் நிகழாவிடின் வாயுக்கள் முற்றுய்க் கலக்கும்வரை ஒன்று ஒன்றுக்குட் புகுமெனவும் அமுக்கமும் வெப்பநிலையும் முன்னுள்ளன போலாகுமெனவும் **பரிசோதனை முறையாற்** காணப்படும. இப்பரிசோதனை உண்மை இரு முக்கியமான முடிபுகளை உய்த்தறிதற்கு எமக்கு உதவும் :

(1) ஒரே வெப்பநிலையில் v என்னுங் கனவளவைத் **தனித்தனியே** நிரப் பும்போது p_1, p_2 என்னும் அமுக்கங்களை உடைய இரு வாயுக்கள் v என்னும் கனவளவுள்ள பாண்டத்திற் கலக்கப்படுமாயின் கலவையின் அமுக்கம் $p_1 + p_2$ ஆகும்.

முதலாவது வாயு v கனவளவும் p_1 அமுக்கமும் உடையது.

இரண்டாவது வாயு v கனவளவும் p_2 அமுக்கமும் உடையது ;

இதன் அமுக்கம் p_1 ஆயின், கனவளவு $\dfrac{p_2 v}{p_1}$ ஆகும் ;

ஏனெனின் போயிலின் விதிப்படி, $p_2 v = p_1 \left(\dfrac{p_2 v}{p_1}\right)$.

ஆயின் இரு வாயுக்களும் p_1 அமுக்கத்தில் v, $\frac{p_2 v}{p_1}$ என்னுங் கனவளவு களைக் கொள்வதாகக் கருதப்படலாம்.

ஆகவே மேற்கூறிய பரிசோதனையின் உண்மையிலிருந்து இவ்வாயுக்கள் கலக்கப்படுமாயின் p_1 அமுக்கத்தில் $v+\frac{p_2 v}{p_1}$ என்னும் மொத்தக் கன வளவு உள்ள கலவை ஆக்கப்படும்.

இக்கலவையின் கனவளவு v யிற்குக் குறைக்கப்பட, அமுக்கம் P யாகு மென உத்தேசிக்க.

போயிலின் விதியால் $$p_1\left(v+\frac{p_2 v}{p_1}\right)=Pv\,;$$

$$\therefore\quad P=p_1+p_2\,;$$

இது எமது எடுப்பை நிறுவும்.

(2) முறையே v_1, v_2 கனவளவுகளும், p_1, p_2 அமுக்கங்களும் கொண்ட இரு வாயுக்கள், கலவையின் கனவளவு V ஆகுமாறு ஒன்றோ டொன்று கலக்கப்படும். வெப்பநிலை மாறாதாயின் கலவையின் அமுக் கத்தைக் காணல்.

முதலாவது வாயு, p_1 அமுக்கத்தில் v_1 கனவளவு உடையது.

இரண்டாவது வாயு, p_2 அமுக்கத்தில் v_2 கனவளவு உடையது; அல்லது p_1 அமுக்கததில் அது $\frac{p_2 v_2}{p_1}$ என்னுங் கனவளவு உடையது.

ஆகவே இரு வாயுக்களும் p_1 அமுக்கத்தில் v_1, $\frac{p_2 v_2}{p_1}$ என்னுங் கனவள வுகளை உடையன எனக் கருதப்படலாம்.

ஆகவே அவை கலக்கப்படும்போது, p_1 அமுக்கத்தில் கலவையின் கனவளவு $v_1+\frac{p_2 v_2}{p_1}$ ஆகும்.

ஆனால் இறுதிக் கனவளவு V ஆகவேண்டும்; வேண்டிய அமுக்கம் P ஆகுக. ஆயின் போயிலின் விதியால்

$$PV=p_1\left(v_1+\frac{p_2 v_2}{p_1}\right)$$

$$=p_1 v_1+p_2 v_2\,;$$

$$\therefore\quad P=(p_1 v_1+p_2 v_2)/V,$$

இதுவே கலவையின் அமுக்கம்.

உதாரணம் 1. $\frac{1}{2}$ வளிமண்டல அமுக்கத்தில் 2 இலீற்றர் வளிகொண்ட ஒரு பாண்டம், 3 வளிமண்டல அமுக்கத்தில் 3 இலீற்றர் வளிகொண்ட வேறொரு பாண்டத்தோடு தொடர்பு படுத்தப்படும். இரு பாண்டங்களிலும் பின்னர் உள்ள வளியின் அமுக்கத்தைக் காணல்.

ஒவ்வொரு திணிவுள்ள வளியிலும் அமுக்கம் 1 வளிமண்டல அமுக்கத்திற்கு மாற்றப்படுமாயின் முதற் பாண்டத்திலுள்ள வளி $2 \times \frac{1}{2}$ இலீற்றர் $= 1$ இலீற்றர் இடங்கொள்ள, இரண்டாம் பாண்டத்திலுள்ள வளி 3×3 இலீற்றர் $= 9$ இலீற்றர் இடங்கொள்ளும். ஆகவே வளியின் மொத்தத் திணிவு வளிமண்டல அமுக்கத்தில் 10 இலீற்றர் இடங்கொள்ளும். ஆனால் அது $2+3$ இலீறறர் $= 5$ இலீறறர் (பாண்டங்களினது கனவளவுகளின் கூட்டுத்தொகை) இடங்கொள்ள வேண்டும். ஆயின் கனவளவு அரைப் பங்காக்கப்படுதலால் அமுக்கம் இரட்டிக்கும் ; ஆகவே வேண்டிய அமுக்கம் 2 வளிமணடல அமுக்கமாகும்.

உதாரணம் 2. 2 கன அடி கனவளவும் 3 வளிமண்டல அமுக்கமும் உள்ள வளியும், 4 கன அடி கனவளவும் 2 வளிமண்டல அமுக்கமும் உள்ள வளியும் தொடக்கத்தில் வெறுமையாயுள்ள 3 கன அடி கனவளவுள்ள பாண்டத்திற்குள் மெதுவாய்ச் செலுத்தப்படும். இச் செய்கையின்போது வளியின் அரைப்பங்கு தப்பும் (நிறையால்). செய்கை முற்றுகிய பின்னர் வளியின் அமுக்கத்தைக் காண்க.

(*Inter. Sc.*)

முற்பந்தியின் குறிப்பீடு வழங்கப்பட,

$$p_1 = 3 \text{ வளிமண்டலம்}, \qquad v_1 = 2 \text{ கன அடி},$$

$$p_2 = 2 \text{ வளிமண்டலம்}, \qquad v_2 = 4 \text{ கன அடி}.$$

போயிலின் விதியிலிருந்து, இரண்டாவது வளித்தொகை 3 வளிமண்டல அமுக்கம் உடையதெனக் கருதப்பட, அதன் ஒத்த கனவளவு (V) $3V = 2.4$ என்பதாலே தரப்படும்.

$$\therefore \ V = \tfrac{8}{3} \text{ கன அடி}.$$

ஆயின் p_1 $(= 3$ வளிமண்டலம்) அமுக்கத்தில் $(2 + \frac{8}{3})$ கன அடியுள்ள மொத்தக் கனவளவு உண்டு ; அதாவது

$$\text{கலவையின கனவளவு} = \tfrac{14}{3} \text{ கன அடி},$$

$$\text{கலவையின் அமுக்கம்} = 3 \text{ வளிமண்டலம்}.$$

இவ்வமுக்கத்தில் வளியின் அடர்த்தி w இரு. / கன அடி ஆயின், வளியின மொத்த நிறை $\frac{14}{3}w$ இரு ; இதன் அரைப்பங்கு நட்டப்படும்.

$$\text{ஆகவே இறுதி நிறை } \frac{7w}{3} \text{ இரு. ஆகும் ;}$$

அதாவது இறுதிக் கனவளவு 3 வளிமண்டல அமுக்கத்தில் $\frac{7}{3}$ கன அடி ஆகும்.

கனவளவு 3 கன அடி ஆகவேண்டியதால், P என்பது ஒத்த அமுக்கமாயின் போயிலின் விதியிலிருந்து,

$$3P = 3.\tfrac{7}{3} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \ P = 2\tfrac{1}{3} \text{ வளிமண்டலம்.}$$

77. வாயுக்களின் அடர்த்திகளும் தன்னீர்ப்புகளும்

முக்கியமான வாயுக்களின் தன்னீர்ப்புகளையும் ஒத்த அடர்த்திகளையும் கொண்ட ஓர் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அவை யாவும் 0°ச. என்னும் வெப்பநிலைக்கும் 76 சமீ. இரச அமுக்கத்திற்கும் ஒத்தன.

தன்னீர்ப்புக்கள்

வளி	..	0·001293	..	நைதரசன்	..	0·001256
ஒட்சிசன	..	0·001429	..	காபனீரொட்சைட்டு	..	0·001977
ஐதரசன்	..	0·0000899	..	ஈலியம்	..	0·000178

அடர்த்திகள்

வளி	..	1·293 கிராம்/இலீறறர்	= 0·0807 இரு./கனஅடி
ஒட்சிசன	..	1·429 கிராம்/இலீற்றர்	= 0·0892 இரு./கனஅடி
ஐதரசன்	..	0·0899 கிராம்/இலீற்றர்	= 0·0056 இரு./கனஅடி
நைதரசன்	..	1·256 கிராம்/இலீற்றர்	= 0·0785 இரு./கனஅடி
காபனீரொட்சைடடு	..	1·977 கிராம்/இலீற்றர்	= 0·1760 இரு./கனஅடி
ஈலியம்	..	0·1785 கிராம்/இலீற்றர்	= 0·0111 இரு./கனஅடி

78. மாரு வெப்பநிலையில் குத்துயரத்தின் அதிகரிப்புக்கு வளிமண்டல அமுக்கத்தின் இறக்கம்

புவிபபரப்பிற் பொதுவாக 14·7 இரு. நிறை / சதுர அங். ஆகும வளி மணடலத்தின அமுக்கச் செறிவு, குததுயரம் அதிகரிக்கக் குறைதலுறும். ஏனெனின் புவிப்பரபபுக்கு மேலுள்ள யாதும் ஒரு புள்ளி P யில் புவிப்பரப்பின மேல் உள்ளதிலுங் குறைவான வளி இருத்தலால், P யில் அமுககச் செறிவு 14·7 இரு./நிறை சதுர அங. என்பதிலுஞ் சிறிதாகும். எனினும் வளி ஏகவினமல்லாததாய் அதன் பயனுய் அதன் அடர்த்தி மாறுதலால் இக்குறைவு ஏகபரிமாணமானதல்ல.

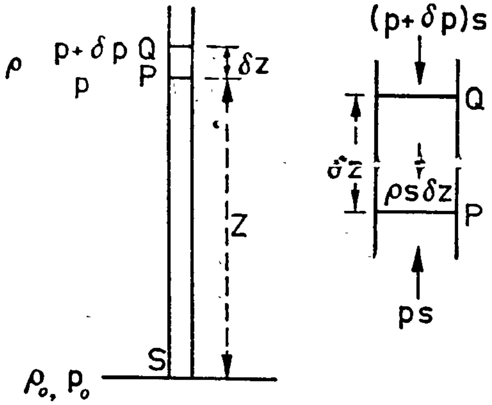
வெப்பநிலை மாறுதென உத்தேசித்து, தொகையீட்டு நுண்கணிதம் வழங்கி நாம் புவிபபரப்பின் மேல் z உயரத்தில் வளிமணடலத்தின் அமுக்கச் செறிவுக்கு ஒரு கோவையை விரைவாகப் பெறலாம்.

s சதுர அடி குறுக்கு வெட்டுள்ள ஒரு வளி நிரலை எடுக்க [படம் 133 (a)] ;

PQ வானது z அடி உயரத்தில் δz நீளமுள்ள நிரலின் ஒரு மூலகத்தைக் குறிககுமென உத்தேசிகக. அமுக்கச் செறிவானது P யில் p எனபதும், Q வில் $p+\delta p$ எனபதும், புவிப் பரபபாகிய S இல் p_0 என்பதும் ஆகுக. வளியின் அடர்த்தி S இல் ρ_0 என்பதும், z உயரத்தில் ρ என்பதும ஆகுக.

PQ [படம் 133 (b)] எனனும் மூலகத்திலே தாக்கும் விசைகளை எடுத்து நோககுக. மூலகத்தின் மேன்முகத்தில் $(p+\delta p)s$ இரு. நிறை யுடைய ஒரு கீழ்முகமான விசை உண்டு.

கூடுதலாக, δz என்னுஞ் சிறு வீச்சு முழுவதும் ρ மாறிலியெனக் கொள்ளுமிடத்து, $\rho s\delta z$ இரு. நிறையுடைய வளிமூலகத்தின் நிறையும் உண்டு.



(a) (b)

படம் 133

மேன்முகமாக மூலகத்தின் கீழ் ps இரு. நிறையுடைய ஒரு விசை உண்டு.

மூலகத்தின் சமநிலைக்கு இவ்விசைகளை நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$ps = (p + \delta p)s + \rho s\delta z\,;$$

$$\therefore\quad 0 = \delta p + \rho\delta z\,;$$

$$\therefore\quad \frac{\delta p}{\delta z} = -\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

இனி ρ, z ஒடு மாறும் ; ஆனால் வெப்பநிலை மாறிலியாகுமிடத்து யாதும் ஒரு வாயுவுக்கு $\frac{p}{\rho}$ = மாறிலி என்பது § 75 இல் இருந்து எமக்குத் தெரியும் ; ஆகவே

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \text{ ஆகி,}$$

(i) தருவது
$$\frac{\delta p}{\delta z} = -\frac{\rho_0}{p_0}p.$$

$\delta z \to 0$ ஆக, எல்லைகள் எடுக்குமிடத்து

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\rho_0}{p_0}p \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

எனின் தொகையிட,

$$\int\frac{dp}{p} = -\int\frac{\rho_0}{p_0}dz$$

$$= -\frac{\rho_0}{p_0}\int dz,\ \rho_0,\ p_0 \text{ என்பன மாறிலிகளாதலால்.}$$

தொகையிட மட$_e$ $p = -\frac{\rho_0}{p_0}z + \mathrm{C}$; இங்கு C யானது தொகையிடல் மாறிலியாகும்.

$z = 0$ ஆகுமிடத்து $p = p_0$ ஆதலால்

$$\text{மட}_e\, p_0 = \mathrm{C}.$$

இறுதியில் $$\text{மட}_e\, p = -\frac{\rho_0}{p_0}z + \text{மட}_e\, p_0;$$

அதாவது $$\text{மட}_e\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0}{p_0}z,$$

அல்லது $$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 z}{p_0}};$$

இது மாறு வெப்பநிலையில் z உயரத்தில் புவிப் பரப்பிலுள்ள அடர்த்தி, அமுக்கங்களாகிய ρ_0, p_0 என்பனவற்றின் சார்பாய் வளிமண்டலத்தின் அமுக்கத்தைத் தரும்.

உண்மையில் வேறுவேறான உயரங்களில் வளியின் வெப்பநிலை மாறிலியாகாது, நிலத்தின் மேலுள்ள ஒவ்வொரு 1000 அடி உயரத்திற்கும் $3\frac{1}{2}$°ப. என்னுஞ் சராசரி வீதத்திற் குறையும். வெப்பநிலையின் வீழ்ச்சி வீதம் "**தவறு வீதம்**" எனப்படும்; இதன் பெறுமானம் ஓரளவு நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட எல்லைவரை எல்லா அகலாங்குகளிலும் எல்லா உயரங்களிலும் ஏறக்குறைய ஒன்றேயாகும்; இங்கிலாந்தில் இவ்வெல்லை ஏறக்குறைய 7 மைல் ஆகும். இவ்வெல்லையின் மேலுள்ள பிரதேசம் "**படைமண்டலம்**" எனப்படும்.

ஒரு மாறுத் தவறு வீதத்தை உத்தேசிப்போமாயின் இவ்வெப்பநிலை மாற்றத்தைக் கவனித்துக்கொண்டு குத்துயரத்தோடு வளிமண்டல அமுக்கத்தின் குறைவை நாம் எளிதாகத் துணியலாம். § 75 இன் குறிப்பீட்டை வழங்க அப்பிரிவில் (xi) என்னுஞ் சமன்பாடு தருவது,

$$p = k\rho(1 + \alpha t)$$
$$= k\rho\alpha\mathrm{T}.$$

ஆகவே $$\rho = \frac{p}{k\alpha\mathrm{T}},$$

இப்பிரிவின் (i) ஆம் சமன்பாடு தருவது,

$$\frac{\delta p}{\delta z} = -\rho$$

$$= -\frac{p}{k\alpha T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

ஆயின் வெப்பநிலை z என்னும் உயரத்தோடு சீராய்க் குறையுமாயின்

$$T = T_0 - bz,$$

இங்கு T_0, நிலத்தின் தனி வெப்பநிலையும்; b மாறிலியுமாகும். (உண்மையில், b, அலகு உடரத்திற்கு வெப்பநிலையின் குறைவாகும்). ஆயின (ii) தருவது

$$\frac{\delta p}{\delta z} = -\frac{p}{k\alpha(T_0 - bz)},$$

$\delta z \to 0$ ஆக

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{k\alpha(T_0 - bz)}.$$

தொகையிட

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dz}{k\alpha(T_0 - bz)}$$

$$= \frac{1}{k\alpha b} \int \frac{-bdz}{T_0 - bz};$$

$$\therefore \text{மட}_e\, p = \frac{1}{k\alpha b}\, \text{மட}_e\, (T_0 - bz) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)};$$

$z = 0$ ஆகுமிடத்து $p = p_0$ ஆதலால், C துணியப்படலாம்.

$$\therefore \text{மட}_e\, p_0 = \frac{1}{k\alpha b}\, \text{மட}_e\, T_0 + C;$$

$$\therefore \text{(iii) தருவது, } \text{மட}_e \left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{1}{k\alpha b}\, \text{மட}_e \left(\frac{T_0 - bz}{T_0}\right)$$

$$= \frac{1}{k\alpha b}\, \text{மட}_e \left(\frac{T}{T_0}\right)$$

இது, யாதும் உயரத்திலுள்ள வளிமண்டல அமுக்கம் அங்குள்ள வெப்ப நிலை, நிலமட்டத்திலுள்ள அமுக்கம், வெப்பநிலை, தெரிந்த மாறிலிகள் என்பனவற்றிற்கிடையே உள்ள ஒரு தொடர்பாகும்.

உதாரணம். 10,000 அடி உயரம் முழுவதும் வெப்பநிலை மாறாது இருக்குமெனக் கொண்டு, அவ்வுயரத்தில் வளிமண்டல அமுக்கத்தைக் காண்க.

புவிப்பரப்பில் வளிமண்டல அமுக்கம் (p_0) ஆனது 14·7 இரு. நிறை/சதுர அங்., அல்லது $14·7 \times 144$ இரு. நிறை/சதுர அடி ஆகும்; § 77 இலுள்ள அட்டவணையிலிருந்து புவிபபரப்பில் வளியின அடர்த்தி (ρ_0) ஆனது 0·0807 இரு./கன அடி ஆகும்.

ஆயின் $p = p_0 e^{-\rho_0 z/p_0}$

$= 14·7 e^{-(0·0807 \times 10,000)/(14·7 \times 144)}$ இரு. நிறை/ச. அங்.

$= 14·7 e^{-0·38}$ இரு. நிறை/சதுர அங்.

$= 10·05$ இரு. நிறை/சதுர அங். அட்டவணைகளிலிருந்து.

பயிற்சி X

1. வளிமண்டல அமுக்கம் சதுர அஙகுலததிறகு 15 இரு. ஆயின 7 அஙகுல விட்டமுளள மக்டிபேக அரைக்கோளங்களை வேறுககுததறகு வேண்டிய விசையைக காணக.

2. புவிப்பரப்பில் வளிமண்டல அமுக்கம் சதுர அஙகுலத்திறகு $14\frac{1}{2}$ இரு. ஆயின், நீர்பபாரமானியின் உயரததை அடியிற காண்க.

3. ஓர் இறையிப் பாரமானியின அடைத்த புயத்தினது வெட்டு திறநத புயவெட்டுககுக் கொள்ளும் விகிதம் 3:17 ஆகும். அடைத்த கிளையில இரசம 1·275 அங்குலததிறகு எழும. ஒரு சாதாரணப் பாரமானியின் இரசததில யாது மாறறம நிகழும்?

4. ஓர் இறையிப் பாரமானியின மூடிய நீளமான குழாய் $\frac{1}{4}$ சதுர அஙகுல உளவெட்டுப் பரப்பளவு கொள்ளுமாறும், திறநத குறுகிய குழாய $\frac{1}{2}$ சதுர அங்குல உளவெட்டுப் பரபபளவு கொள்ளுமாறும அமைககபபடும. வளியின உணமையான அமுககம் 1 அங்குலம் விழுமாயின, பாரமானியின நீளமான குழாயில யாது வீழ்சசி நிகழுமெனக காணக.

5. வழி ஒழிக்கபபட்ட வாஙகியின கீழ் வைககபபடும ஒரு பாணடத்திற கொள்ளப்படும் நீரில் ஓர் உடல தன் அரைபபஙகு கனவளவு உள்ளாழ்ததப்படுமாறு மிதககும். வாங்கிககுள அடாத்தி வளிமண்டல அமுககங கொள்ளும் வளியினது அடாத்தியின 80 மடஙகு ஆகும்வரை வளி செலுத்தபபடும. வளிமண்டல அமுககத்தில வளியின் தனனீர்ப்பு 0·00125 எனககொணடு நீரில இபபோது உள்ளாழ்ததப்படுங் கனவளவு முழுக் கனவளவின் $\frac{4}{9}$ ஆகுமெனக காட்டுக.

6. சீரான துவாரமுளள ஒரு குழாய்ககுள் ஓரளவு வளி அடைககப்படும். ஒரு வளிமண்டல அமுககத்தில் இவ்வளி நிரலின நீளம 12 அஙகுலமாயின 3 வளிமணடல அமுககத்திலும் $\frac{1}{3}$ வளிமண்டல அமுக்கததிலும நீளங்களைக காணக.

7. இரு முனைகளிலுந் திறந்து, இரு கிளைகளும் நிலைககுத்தாயுளள ஒரு வளைநத சீரான குழாய்ககுள இரசம் வாாககபபடும். ஒரு முனை இரசததின மேல் 4 அங்குல உயரத்தில இருககும். இம்முனை இப்போது அடைககபபடுமாயின அடைதத கிளையில இரசம் 1 அஙகுலம எழச் செயதறகு திறந்த முனைககுள எவ்வளவு இரசம் வார்க்கப்பட வேணடும்

8. $2h$ நீளமுள்ள ஒரு நேர்ச் சீரான குழாயின் ஒரு முனை அடைக்கப்பட்டு அதன் திறந்த முனை ஓர் இரசக் கிண்ணத்தில் மட்டாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். வளிமண்டல அமுக்கத்தில் $\frac{4}{9}h$ இற்குச் சமனான குழாய் நீளத்தை இடங்கொள்ளும் ஓரளவு வளி குழாய்க்குட் கொள்ளப்படுமாயின், இரசம் குழாய்க்குள் $\frac{2}{3}h$ உயரத்திற்கு எழுமெனக் காட்டுக ; பரிசோதனைக் காலத்தில் இரசப் பாரமானியின் உயரம் h ஆகும்.

9. 0·0004 கன அங்குலக் கனவளவுள்ள ஒரு வளிக் குமிழி 17 அடி ஆழமான ஒரு குளத்தின் அடியில் உருவாகி அது பரப்பை அடையும்போது அதன் கனவளவு என்ன?

10. சரியான பாரமானியின் வாசிப்பு 30 அங்குலமாகுமிடத்து குழாயில் சிறிதளவு வளியைக் கொண்ட பாரமானியின் வாசிப்பு 28 அங். ஆகும். இக்குழாய், உள ளாழ்த்தப்பட்ட இரசப் பரப்பிற்குமேல் $31\frac{1}{3}$ அங். உயரமுடையது. உண்மையான பார மானியின் வாசிப்பு 29 அங்குலத்திற்கு இறங்குமாயின் பிழையான பாரமானியின் வாசிப்பு $27\frac{1}{3}$ அங். ஆகுமெனக் காட்டுக.

11. புவிப்பரப்பில் வளிமண்டல அமுக்கம் 14·7 இரு. நிறை/சதுர அங். ஆகுமிடத்து, வளிமண்டலம் ஏகவினமாய் அடர்த்தி 0·0807 இரு./ கன அடி உள்ளதாயின் அதன் உயரம் என்னதாய் இருத்தல் வேண்டும்?

12. சதுர அங்குலத்திற்கு 10 இரு. அமுக்கத்தில் 50 கன அங்குல வளியைக் கொண்ட ஓர் அறைக்குள், சதுர அங்குலத்திற்கு 15 இரு. அமுக்கத்தில் 100 கன அங்குலமுள்ள வளி பம்பிக்கப்படும். கலவையின் அமுக்கம் யாது?

13. சீரான உருளைப் பாரமானிக் குழாயின் உச்சி கொள்ளியிலுள்ள இரச மட்டத்திற்கு 33 அங்குலம் மேலாக இருக்கும். குழாயின் உச்சியிலுள்ள இரசத்திற்கு மேல் ஒரு சிறு கணியமுள்ள வளி அடைக்கப்பட்டிருத்தலால் பாரமானி 29 அங். வாசிக்கவேண்டிய விடத்து 28·6 அங். வாசிக்கும். உண்மையான வாசிப்பு 29·48 அங். ஆகுமிடத்து பாரமானி யாது வாசிக்க வேண்டும். (*Inter. Sc.*)

14. தந்த அமுக்கத்திலுள்ள ஒரு திணிவுள்ள வளி 13°ச. வெப்பநிலையில் 44 கன அங்குல இடத்தைக் கொள்ளும். வளியின் கனவளவு 24 கன அங்குலத்திற்கு ஒடுக்கப்பட்டு வெப்பநிலை 39°ச. இற்கு ஏற்றப்படுமாயின் அமுக்கம் இரட்டிக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

15. கனவளவு 3 ஆயும், 27 அங்குல இரசவமுக்கமும் உள்ள வாயு கனவளவு 2·5 ஆயும் 32 அங்குல இரசவமுக்கமும் உள்ள வாயுவோடு கலக்கப்படும். வாயுக்களின் தொடக்க வெப்பநிலைகள் ஒன்றேயாகிப் பின்னர் வெப்பநிலையில் மாற்றம் இல்லாவிடின் 30 அங்குல இரசவமுக்கத்திற் கலவை யாது கனவளவு கொள்ளும்?

16. பாரமானியின் உயரம் 30 அங். ஆகுமிடத்து, மேன்முனையில் அடைக்கப்பட்டு 20 அங். நீளமுள்ள ஒரு கண்ணாடிக் குழாய் மேன்முனை இரசமட்டத்தோடு இருக்கும்வரை இரசத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த்தப்படும். இரசம் குழாய்க்குள் என்ன தூரம் எழும்? (*Inter. Sc.*)

17. ஒரு கன மீற்றர் வளியின் நிறை 1 கிலோ கிராம் எனத் தரப்படுமாயின் 10 மீற்றர் விட்டமுள்ள கோளப் பலூன் ஒன்றில் வளியின் மீயுந்தலைத் துணிக ; 8 கன மீற்றர் ஒரு கிலோ கிராம் நிறையாகும் ஐதரசனால் இப் பலூன் நிரப்பப்படுமாயின் அதன் மொத்த நிறை ஏறக்குறைய 458 கிலோ கிராமாயின் அது எழுமென நிறுவுக.

18. ஒரு முசலம் பொருத்திய உருளைக்குள் 20 இரு./அங்.^{2} அமுக்கத்தில் வளி அடைக்கப் பட்டுள்ளது. முசலம் தொடக்க நிலையிலிருந்து 8 அங்குல தூரம் உள்ளாகத் தள்ளப்படுமாயின் கொள்ளப்பட்ட வளியின் அமுக்கம் 30 இரு./ அங்.^{2} ஆகும். முசலத்தின் வெட்டு 6 அங்குல விட்டமுள்ள ஒரு வட்டமாயின் முசலம் தொடக்க நிலையிலிருந்து 12 அங்குலம் உள்ளாகத் தள்ளப்படும்போது அமுக்கத்தையும் முசலத்தில் உஞற்றப்படும் உதைப்பையுங் கணிக்க. (*Inter. Sc.*)

19. உச்சி திறந்ததும் $3a$ நீளமுமுள்ள ஓர் உருளைச் சாடி தலைகீழாகக்கப்பட்டு அதன் நீளத்தின் மூன்றிலொரு பங்கு நீரின் கீழ் இருக்குமாறு ஓரளவு உளளாழ்த் தப்படும். நீர்ப்பாரமானியின உயரம் சாடி நீளத்தின இரு மடங்காயின நீர் சாடிக்குள் எழுந்தூரத்தைக் காண்க.

20. மெல்லிய மடியான உலோகத்தால் ஆக்கப்படும் ஒரு பாரமான சதுரமுகிப் பாண்டத்தின் பக்கம் 3 அடி ஆகும். அதன ஒரு முகத்தில் ஒரு சிறு துளை உண்டு. இப்பாண்டத்தின் மூன்றிலொரு பங்கு நீரால் நிரப்பப்பட்டுத் துளைகொண்ட முகம் கிடையாக மிகத் தாழ்ந்திருக்குமாறு ஒரு பெரிய நீர்ப்பரப்பில அதன் அரைப்பங்கு உளளாழ்த்தப்பட்டு மிதக்கும். அது சுழற்சியினறிப் பரப்பின கீழ மெதுவாய இழுக்கப்படுமாயின் மேன்முகம் ஒரு குறித்த ஆழத்தை அடைந்த பினனர் பாண்டம விடப்பட்டால மீண்டும் எழாது எனக் காட்டுக. நீர்ப் பாரமானியின உயரம 34 அடி எனக்கொண்டு இவ்வாழத்தைக் காண்க. *(H.S.C.,I.)*

விடை

1. $\frac{1}{2}$ வளிமண்டலம்.

2. 33·408 அடி.

3. $1\frac{1}{2}$ அங். ஏற்றம்.

4. $\frac{2}{3}$ அங்.

6. 4 அங்., 36 அங்.

7. குழாயின 12 அங். நிரப்பத்தக்கது.

9. 0·0006 கன அங்.

11. 4·97 மைல.

12. 40 இரு. நிறை/சதுர அங.

13. 29·98 அங.

15. 5·36.

16. 6·28 அங்.

17. $\frac{500\pi}{3}(1-s)$; இங்கு s ஆனது வளியோடு ஒப்பிடுமிடத்து ஐதரசனின தன்னீர்ப்பு.

18. 40 இரு. நிறை/சதுர அங., 1131·12 இரு. நிறை.

19. $0{\cdot}31a$.

20. $3\frac{19}{28}$ அடி.

அதிகாரம் XI

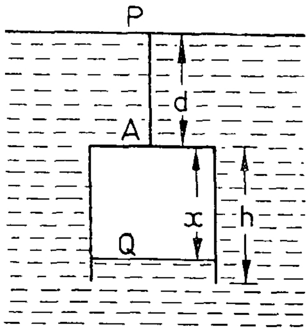
நீர் நிலையியற் பொறிகள்

79. முன்னுரை

இவ்வதிகாரத்தில் தாம் தொழிற்படுதற்கு நீர்நிலையியற் கோட்பாடுகளிற சார்ந்திருக்கும் பொறிகளின் செயல்களை எடுத்து நோக்குவோம். நீரியல் (பிரமா) அமுத்தியாகிய இத்தகைப பொறியொன்றை § 10 இல் நாம் எடுத்து நோககியுள்ளோம். இங்கு ஆழ் மணி, இறையி, பல்வேறு பம்பிகள் ஆகியவற்றின் செயற்படுமுறைகளைப் படிப்போம்.

80. ஆழ் மணி

இது உச்சியில் அடைக்கப்பட்டு அடியிலே திறந்த ஓர் உருளை அல்லது மணி வடிவுடைய பாண்டமாகும். இது பல மனிதரைக் கொள்ளக்கூடிய அளவுககுப் பெரிதாயும், கொள்ளப்படும் வளியோடு தன் நிறையால் நீரில் ஆழக் கூடிய பாரமும் உடையதாகும். இது ஒரு சங்கிலியால தாழ்த்தப்படும் ; ஆழமான நீரின அடியில் இதனுள் மனிதா வேலை செய்தறகு இசைவாக்குதலே இதன் நோக் காகும். இது நீரில் ஆழும்போது கொள் ளப்படும் வளியின் அமுக்கம் படிப்படியாக அதிகரிக்கும் ; ஏனெனின் இவ்வமுக்கம் இவ்வளி தொடுகையிலுள்ள நீரின் அமுக் கததிற்குச் சமனுகும். ஆகவே வளி நெருக்கப்பட்டு நீர் சிறிதளவு மணிக்குள் எழும். இதனை வெல்தற்கு மணியைப் பரபபோடு தொடுக்கும் இரு குழாய்கள் உண்டு ; ஒன்றிற்கூடாக வளி பம்பிக்கப்படும் மறறையதறகூடாக வளி தப்பலாம். மணி, ஒருளவிற்கு சங்கிலியின் இழுவையாலும் மிகுதி மணிக்குள் உள்ள வளியின கணவளவிற் தங்கியிருக்கும் நீரின மீயுந்த லாலுந் தாங்கப்படும்.



படம் 134

வரிப்படமுறையில் படம் 134 இற் குறிக்கப்பட்ட மணி, உருளைவடிவான தெனவும் வளி உட்பம்பிககவோ தப்பவோ அனுமதிக்கப்பட⁻தெனவு உத்தேசிக்க.

ஒரு குறித்த ஆழத்திற்கு

(1) மணிக்குள் நீர் எழும் உயரம் ;

(2) தாஙகுஞ் சங்கிலியின் இழுவை ;

(3) நீர் மணிக்குள் எழுதலைத் தடுத்தற்கு வளிமண்டல அமுக்கத்தில் உட்செலுத்தப்படவேண்டிய வளியின் கனவளவு ஆகியவற்றைத் துணிதல்.

(1) H, நீரபபாரமானியின் உயரமும், s சதுர அடி மணியின் குறுக்கு வெட்டுப் பரபபளவும், d அடி மணி உச்சியின் ஆழமும், h அடி மணியின் உயரமும், x அடி மணிக்குள் உள்ள சுயாதீனமான வளியின் உயரமு மாகுக.

தொடக்கத்தில் மணிக்குள் உள்ள, வளியின கனவளவு hs கன அடி ஆகும். தொடக்க அமுக்கம் வளிமண்டலத்திற்குரியதாகும் (H அடி நீர்).

மணி கீழே ஆழ்த்தப்படும்போது, மணிக்குள் வளியின் அமுக்கம் வளி தொடுகையிலுள்ள நீரின் அமுக்கச் செறிவுக்குச் சமனாகும் ; இது $(d+x)$ அடி.

அதாவது, $=(d+x)$ அடி ஆழத்திலுள்ள அமுக்கச் செறிவு.

$$=\mathrm{H}+d+x,$$

கீழ் ஆழ்த்தப்படும்போது வளியின் கனவளவு

$$=sx \text{ கன அடி.}$$

போயிலின் விதியிலிருந்து

தொடக்க அமுக்கம் × கனவளவு = இறுதியமுக்கம் × கனவளவு,

அதாவது

$$\mathrm{H}\,.\,hs=(\mathrm{H}+d+x)\,sx\;;$$

$$\therefore\quad x^2+x(\mathrm{H}+d)-\mathrm{H}h=0.$$

இது x இல் ஒரு நேர் மூலம் மாத்திரமுள்ள இருபடிச் சமன்பாடாகும் ; இதுவே எமக்கு வேண்டிய பெறுமானம் ; நீர் மணிககுள் எழும் உயரம் $h-x$ ஆகும்.

(2) தாங்குஞ் சங்கிலியின் இழுவையைக் காண்பதற்கு, மணியிலே தாக்கும் கீழ்முக விசைகளை மேனமுக விசைகளுக்குச் சமனபடுத்துவோம். கீழ்முக விசைகளாவன :

(i) மணியின் நிறை. இது W இரு. நிறை ஆகுக.

(ii) உள்ளடைத்த வளியின் நிறை.

மேன்முக விசைகளாவன :

(i) சங்கிலியிலுள்ள இழுவை, T இரு. நிறை எனக.

(ii) மணியால் இடம்பெயர்ககப்பட்ட நீரின் மேலுதைப்பு.

மணியால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் கனவளவு xs கன அடி ஆதலால் அதன் நிறை $xs\rho$ இரு. நிறையாகும் ; இங்கு ρ நீரின் அடர்த்தியாகும். மணியின் உலோகத்தால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின்

மேலுதைப்பும் மணிக்குள் அடைக்கப்பட்ட வளியின் நிறையும் மணியின் நிறையோடு ஒப்பிடுமிடத்து மிகச் சிறியனவாதலால் அவற்றை நாம் புறக் கணிக்கலாம்.

ஆகவே மேன்முகவிசை கீழ்முகவிசைகளைச் சமப்படுத்த,

$$T + xs\rho = W\,;$$

$$\therefore \quad T = W - xs\rho \text{ இரு. நிறை.}$$

(3) மணியிலிருந்து நீரை வெளியே அகற்றுதற்கு உட்செலுத்த வேண்டிய வளியின் கனவளவு வளிமண்டல அமுக்கத்தில் v ஆகுக. வளிமண்டல அமுக்கத்தில் மணிக்குள் தொடக்கத்திலுள்ள வளியின் கனவளவு hs ஆகும்.

ஆயின், H வளிமண்டல அமுக்கத்தில் $v + hs$ என்னும் மொத்தக் கனவளவு கொள்ளும் வளி, $H + h + d$ அமுக்கத்தில் hs என்னுங் கனவளவுக்கு நெருக்கப்படும் ;

∴ போயிலின் விதியிலிருந்து

$$(v + hs)\,H = hs\,(H + h + d)\,;$$

$$v = \frac{hs\,(h + d)}{H}.$$

உதாரணம் 1. 6 தொன் நிறையுள்ள ஓர் இரும்பு ஆழ் மணி 160 கன அடி வளி கொள்ளும். மணி கடல் நீரில் முற்றும் உள்ளாழ்த்தப்பட்டு வளியால் நிரப்பப்படுமிடத்து தாங்குஞ் சங்கிலியின் இழுவையைக் காணல் (இரும்பின் தன்னீர்ப்பு $= 7{\cdot}2$, கடல் நீரின் தன்னீர்ப்பு $= 1{\cdot}024$).

ஒரு கன அடி கடல் நீரின் நிறை $= 1024$ அவு. $= 64$ இரு. நிறை ;

∴ உள்ளேயுள்ள வளியால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை $= 64 \times 160$

$= 10{,}240$ இரு. ;

மணியின் இரும்பால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை

$= 6 \times 1{\cdot}024 \div 7{\cdot}2$ தொன்

$= 1911$ இரு. (ஏறக்குறைய) ;

∴ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட மொத்த நீரின் நிறை $= 12{,}151$ இரு. நிறை.

ஆனால் மணியின் நிறை $= 6 \times 2240 = 13{,}440$ இரு. நிறை.

சங்கிலியின் இழுவை $= 1289$ இரு. நிறை.

உதாரணம் 2. 200 கன அடி உட்கொள்ளளவு கொண்ட ஆழ்மணி அதன் அடி பரப்பின் கீழ் 20 அடியிலிருக்குமாறு ஆற்றில் தாழ்த்தப்படுமாயின் நீர் உள்ளொழுதலைத் தடுத்தற்கு வளிமண்டல அமுக்கத்தில் எவ்வளவு கன அடி கொண்ட வளி பம்பிக்கப்பட வேண்டுமெனக் காணல்.

மணியை நிரப்பும் வளி, வளிமண்டல அமுக்கத்தில் இடங்கொள்ளுங் கனவளவு v ஆகுக. வளிமண்டல அமுக்கம் 34 அடி நீராலாய அமுக்கத்திற்குச் சமனுகும்.

மணிக்குள் அமுக்கம் $= 34 + 20$ அடி நீராலாயதாகும்.

வளி உண்மையில் இடங்கொள்ளுங் கனவளவு $= 200$ கன அடியாகும். ஆகவே போயிலின் விதியிலிருந்து

$$v \times 34 = 200 \times 54 ;$$

$$\therefore \quad v = 200 \times 54 \div 34 = 318 \text{ கன அடி, ஏறக்குறைய.}$$

ஆகவே வளிமண்டல அமுக்கத்தில் $318 - 200$ அல்லது 118 கன அடி கொள்ளும் வளி உள்ளே பம்பிக்கவேண்டும்.

உதாரணம் 3. **வளி நிரம்பிய ஒரு போத்தல் தலைகீழாக்கப்பட்டு நீரில் 51 அடி ஆழத்திற்குத் தாழ்த்தப்படும். எவ்வளவு நீர் போத்தலில் உட்செல்லுமெனக் காணல்.**

34 அடி இறங்கும்போது அமுக்கமானது 1 வளிமண்டலம், அல்லது 51 அடிக்கு $1\frac{1}{2}$ வளிமண்டலம் அதிகரிக்கும். ஆகவே 51 அடி ஆழத்தில் அமுக்கம் பரப்பிலுள்ளதின் $2\frac{1}{2}$ அல்லது $\frac{5}{2}$ மடங்காகும். ஆகவே போயிலின் விதியிலிருந்து வளியின் கனவளவு அது பரப்பிற் கொள்ளும் கனவளவின் $\frac{2}{5}$ ஆகும். ஆகவே போத்தற் கனவளவின் எஞ்சிய $\frac{3}{5}$ பங்கை நிரப்பும்வரை நீர் போத்தலுள்ளே செல்லும்.

உதாரணம் 4. **9 அடி உயரமான ஓர் உருளை ஆழ் மணி அதன் உச்சி பரப்பின்கீழ் 11 அடியிலிருக்கும்வரை ஒரு குளத்திலே தாழ்த்தப்படும். வளி உட்பம்பிக்கப்படவில்லையெனின் நீர் உள்ளே எவ்வளவு உயரம் எழுமெனக் காணல்.**

வளி இடங்கொள்ளும் உயரம் x அடி ஆகுக (AQ, படம் 134).

ஆயின் ஆழம் $PQ = (11 + x)$ அடி.

ஆகவே Q வில் அமுக்கம் $(34 + 11 + x)$ அடி அல்லது $(45 + x)$ அடி உயரமுள்ள நீர் நிரலால் ஆய அமுக்கமாகும்.

ஆனல் தொடக்கத்தில் வளி 34 அடி நீர் நிரலின அமுக்கத்தில் 9 அடி நீளத்தை இடங்கொண்டுள்ளது. ஆகவே போயிலின் விதியிலிருந்து

$$34 \times 9 = (45 + x) \times x ;$$

$$\therefore \; x^2 + 45x - 306 = 0.$$

இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க,

$$(x + 51)(x - 6) = 0 \; ; \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

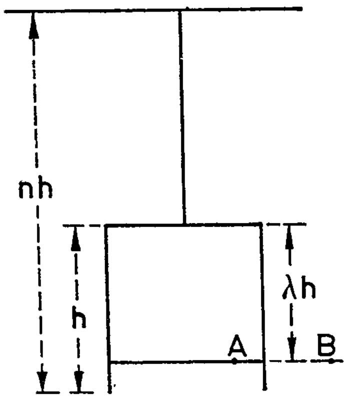
$$\therefore \quad x = -51 \text{ அல்லது } 6.$$

வளி இடங்கொள்ளும் நீளம் ஒரு மறைக் கணியமாகாது.

$\therefore \quad x = 6$ ஆகி, நீர் மணிக்குள் $9 - 6$ அல்லது 3 அடி எழும்.

உதாரணம் 5. சீரான குறுக்கு வெட்டுள்ள ஓர் ஆழ் மணி அதன் அடி ஒரு பெரிய குளத்தில் மட்டாய் உள்ளாழ்த்தப்படுமாறு நிலைக்குத்தாய்த் தொங்கவிடப்பட்டு, வளி வழங்கும் ஒரு குழாய் மணியைச் சந்திக்குமிடத்தில் ஒரு வால்விஞல் அடைக்கப்படும். ஆழ் மணியின் உயரம் h நீர்ப்பாரமானியின் உயரத்துக்குச் சமன். மணி nh தூரம் தாழ்த்தப்படுமாயின் மணி நீளத்தின் வளிகொண்ட பகுதியின் பின்னம் λ வைக் கண்டு, n மிகப் பெரிதாகுமிடத்து λ அண்ணளவாய் $\frac{1}{n}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

ஆழ் மணியிலிருந்து நீரை அகற்றற்குக் கூடுதலாக வளி பம்பிக்கப்படுமாயின், இவ்வளியானது அத்தகைய n ஆழ் மணிகளைத் தொடக்க நிலையில் வளிமண்டல அமுக்கத்திலுள்ள வளியால் நிரப்புதற்குப் போதியதாகும் எனக் காட்டுக. (இங்கு n ஆனது கட்டாயமாய்ப் பெரிதாக வேண்டியதில்லை) (*H. S. C., I.*)



படம் 135

படம் 135 ஐப் பார்க்க. A என்பது ஆழ் மணிக்குள் உள்ள நீர்ப்பரப்பில் ஒரு புள்ளியாகுமாறு A, B என்பன ஒரே மட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்குமாயின் A, B என்பனவற்றில் அமுக்கச் செறிவுகள் சமமாகும். A யில் அமுக்கச் செறிவு மணிக்குள் உள்ள வளி உள்ளாக்கப்பட்ட அமுக்கமாகி,

B யில் அமுக்கச் செறிவு $=$ வளி மண்டல அமுக்கம் $+$ B யின் ஆழத்தாலாய அமுக்கம.

$$=h+(n-1)\,h+\lambda h\ ;$$

ஏனெனின் h ஆனது நீர்ப்பாரமானியின் உயரமும் $nh-h+\lambda h$ ஆனது B யின் ஆழமுமாகும் ;

$\therefore$ மணிக்குள் உள்ள வளியில் அமுக்கம் $=h+(n-1)\,h+\lambda h.$

ஆஞல், மணியின குறுக்கு வெட்டுப்பரப்பளவு s ஆயின் மணிக்குள் உள்ள வளியின் கனவளவு $=\lambda hs.$

தொடக்கத்திற் கனவளவு hs ஆகி அமுக்கம் h ஆதலால், போயிலின் விதியிலிருந்து

$$h\,.\,hs=\lambda hs\,[h+(n-1)\,h+\lambda h]\ ;$$

$$\therefore\quad 1=\lambda\,(1+n-1+\lambda)$$

$$=\lambda n+\lambda^2\ ;$$

$$\therefore\quad \lambda^2+\lambda n-1=0 \qquad \text{(i)}$$

என்பதால் λ தரப்படும்.

$$\therefore\quad \lambda=-\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{2}\sqrt{(n^2+4)}\ ;$$

λ விற்கு நேர்ப் பெறுமானம் பெறுதற்கு வர்க்கமூலத்தின் நேர்ப் பெறுமானமே எடுக்கவேண்டும்.

n பெரிதாகுமிடத்து λ மிகச் சிறிய நேர்ப் பின்னமாகி, λ வோடு ஒப்பிடு மிடத்து λ^2 புறக்கணிக்கத்தகுமென்பது (i) என்னுஞ் சமன்பாட்டி லிருந்து தெளிவாகும். ஆகவே n இன் பெரிய பெறுமானங்களுக்கு (i) என்னுஞ் சமன்பாடு அண்ணளவாய்

$$\lambda n = 1,$$

அ—து. $$\lambda = \frac{1}{n} \text{ ஆகும்.}$$

நீரை மணியிலிருந்து அகற்றற்கு உட்பம்பிக்க வேண்டிய வளி h வளி மண்டல அமுக்கத்தில் V கனவளவு கொளளுமென உத்தேசிகக. தொடக் கத்தில மணிக்குள் h வளிமண்டல அமுக்கத்தில் hs கனவளவு வளி இருத்தலால், h அமுக்கத்தில $V+hs$ என்னுங் கனவளவுள்ள வளி உண்டு; இவ்வளி nh ஆழத்தில் உள்ள அமுக்கச் செறிவுக்குச் சமனுன அமுக்கத்தில், அதாவது $h+nh$ அமுக்கத்தில், hs கனவளவுக்கு ஒடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே போயிலின் விதியால்,

$$(V+hs)\,h = hs\,(h+nh)\;;$$

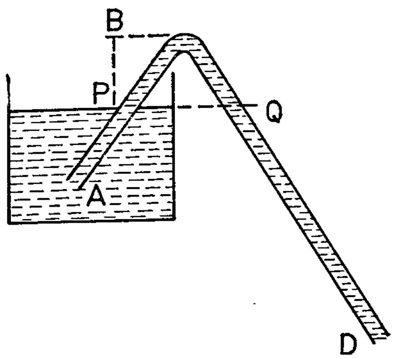
$$\therefore\quad V = snh = n\,.\,sh\;;$$

அதாவது, வளிமண்டல அமுக்கத்தில் பம்பிக்கவேண்டிய வளியின் கன வளவானது, தொடக்க நிலையில் வளிமண்டல அமுக்கத்தில் மணிக்குள் கொள்ளப்படட வளியினது கனவளவின் n மடங்காகும்;

அதாவது வேண்டிய கனவளவு தொடக்க நிலையில் n ஆழ் மணிகளை வளிமண்டல அமுக்கத்தில் வளியால் நிரப்புதற்குப் போதியதாகும்.

81. இறையி

இது திரவங்கொண்ட பாண்டஙகளை வெறுமையாக்கற்குப் பிரயோகிக்கப் படும் ஒரு கருவியாகும். ஒரு புயம் மற்றையதிலும் பெரிதாயுள்ள ஒரு கூன் குழாயால் இது ஆக்கப்படும் (படம் 136). இது செயறபடும் முறையை விளக்குதற்கு, இறையி திரவத்தால் நிரப்பப்பட்ட பின் னர் A, D என்னும் இருமுனை களும் செருகிகளால் தற்காலிகமாக அடைக்கப்பட்டுக் குறுபுயம் படம் 136 இல் உள்ளது போல், அதே திரவம் கொண்ட பாண்டத்திலே தாழ்த்தப்படுமென உத்தேசிக்க. முனை D அடைக்கப்பட்டிருக்க முனை A இப்போது திறக்கப்படுக.



படம் 136

ஆயின் PB என்னும் உயரம், பாரமானிக்குள் திரவம் ஏறும் உயரத்தி லுஞ் சிறிதாயின், P என்னும் பரப்பிலுள்ள வளிமண்டல அமுக்கம் குழாய்க்குள் ஒரு வெற்றிடம் ஆக்கப்படுதலைத் தடுத்தலால் குழாய் திரவத் தால் நிரப்பப்பட்டிருக்கும்.

நீள்புயத்தில் P யிலுள்ள பரப்பின் மட்டத்தோடு Q எடுக்கப்படுமாயின் (Q என்பதை P யோடு கோணல்மாணலான அல்லது கிடையும் நிலைக்குத்து மான கோடுகளாலே தொடுப்பதால்) Q விலுள்ள அமுக்கம் P யிலுள்ள அமுக்கத்திற்கு, அதாவது வளிமண்டல அமுக்கத்திற்குச் சமனாகுமென நாம் காட்டலாம். ஆகவே D யில் குழாய்க்குள் உள்ள அமுக்கம் வெளியி லுள்ள அமுக்கத்திலும் QD என்னும் நிரலாலாய தொகையாற் பெரி தாகும். இம்மிகையான அமுக்கம் செருகியை வெளியே தள்ள எத்த னிக்கும்.

ஆகவே செருகி நீக்கப்படுமாயின் திரவம் D யில் வெளிப்பாயும். குழாய்க்குள் வெற்றிடம் ஆக்கப்படாததால் P யிலுள்ள வளிமண்டல அமுக்கம் A யிற் குழாய்க்குட் புதிய திரவத்தை எழச்செய்து ஒரு தொடர்ச்சியான அருவியை ஆக்கும்.

ஆயின், இறையி வேலை செய்வதற்கு வேண்டிய இரு நிபந்தனைகள் :—

(1) முனை D வெறுமையாக்க வேண்டிய பாண்டத்தின் திரவமட்டத்தின் கீழ் இருக்கவேண்டும் ; அதாவது D யானது P யின் கீழ் இருக்க வேண்டும்.

(2) திரவமட்டத்தின்மேல் இறையி உச்சியின் உயரம் இத்திரவங்கொண்ட பாரமானியின் உயரத்திலுஞ் சிறிதாகவேண்டும் ; அதாவது, BP யானது நீர் இறைக்கப்படும்போது 34 அடியிலுஞ் சிறிதாகி இரசம் இறைக்கப்படு மிடத்து 30 அங்குலத்திலுஞ் சிறிதாகவேண்டும்.

82. பம்பிகள்

இவ்வதிகாரத்தின் மீதி பம்பிகளுக்கென ஒதுக்கப்படும். பாயியமுக்க விதிகளைச் சார்ந்து வேலை செய்யும் பம்பிகளை எடுத்து நோக்குவோம்.

நாம் இங்கு படிக்கும் பம்பிகளின் வகைகள் பின்வருமாறு :—

(1) நீரை ஏற்றி உயர்ந்த மட்டத்தில் வெளியாக்கும் நீர்ப் பம்பிகள் ;

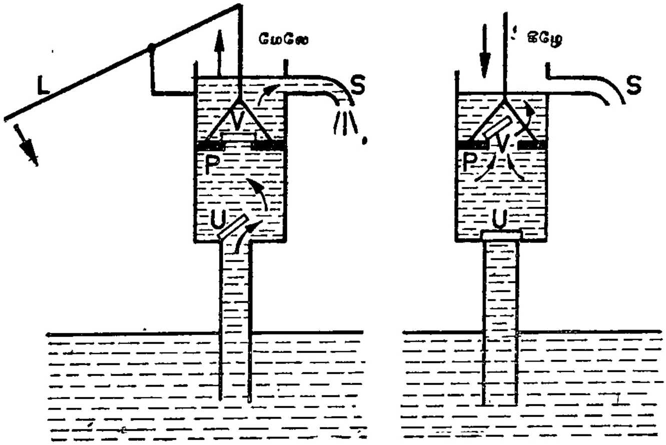
(2) ஒரு பாண்டத்தில் வளியை ஒழிக்கும் அல்லது பகுதியாய் ஒழிக்கும் வளிப் பம்பிகள் ;

(3) ஒரு பாண்டத்தில் வளியமுக்கத்தை அதிகரிக்கும் வளியொடுக்கிகள்.

83. பொதுப்பம்பி அல்லது உறிஞ்சற் பம்பி

இது ஒரு பீப்பா அல்லது ஓர் உருளையைக் கொண்டிருக்கும். இப் பீப்பா அதன் அடிக்குள் திறந்திருக்கும் ஒரு குழாயால் ஏற்றப்பட வேண்டிய நீரோடு தொடுக்கப்படும் (படம் 137). குழாய் பீப்பாவோடு தொடுக்கு மிடத்தில் மேனமுகமாகத் திறக்கும் ஒரு வால்வு U உண்டு.

நெருக்கமாகப் பொருந்தும் ஒரு முசலம் (P) பீப்பாவில் உண்டு. இம் முசலம் பம்பிக் கைப்பிடியோடு (L) தொடுக்கப்பட்ட ஒரு முசலக் கோலால் உயர்த்தப்படலாம் அல்லது தாழ்த்தப்படலாம். இம் முசலத்தில் மேன்



(*a*) (*b*)

படம் 137

முகமாகத் திறக்கும் வேறொரு வால்வு V உண்டு ; நீர் S என்னுந் தூம்புக்கூடாக வெளியாக்கப்படும்.

பம்பியினது தொழிற்பாட்டை விளக்கற்கு முசலம் உருளையின் அடியி லிருக்க பீப்பா நீரால் நிரப்பபபட்டிருக்குமெனக் கொள்க.

மேலடிப்பில் [படம் 137(*a*)] வால்வு V அடைக்கப்பட்டிருக்க முசலத்தின் கீழ் அமுக்கம் ஒடுக்கப்படுதலால், கிணற்றிலுள்ள நீர்ப்பரப்பிலே தாக்கும் வளிமண்டல அமுக்கம் குழாய்க்குள நீரை மேற்செலுத்தும். இந்நீர் U என்னும் வால்வை உயர்த்திப் பீப்பாவுக்குட் செல்லும். அதே நேரத் தில் முசலத்தின் மேலுள்ள நீர் தூம்பின் மட்டத்திற்கு ஏற்றப்பட்டு வெளியே பாயும்.

கீழடிப்பில் [படம் 137(*b*)] வால்வு U அடைக்கப்படுதலால் நீர் V என்னும் வால்வை உயர்த்தி, முசலம் P யின் கீழ்ப்பக்கத்திலிருந்து மேற்பக்கத்திற்குச் செல்லும்.

அடுத்துவரும் மேலடிப்பில் இந்நீர் தூம்புக்கு ஏற்றப்பட புது நீர் U என்னும் வால்வுக்கூடாகப் பீப்பாவுக்குட் செல்லும். முசலத்திற்குக் கீழுள்ள நீர் வளிமண்டல அமுக்கத்தால் கீழிருந்து மேல் ஏற்றப்படுதலால் நீர்ப்பரப்பின் மேல் முசலத்தின உயரம் நீர்ப்பாரமானியின் உயரத்தை அதிகரிக்கக்கூடாது. அவ்வாறில்லாவிடின் பீப்பாவுக்குள் வெற்றிடம் ஆக்கப்பட்டு நீரின் உட்பாய்ச்சல் நின்றுவிடும்.

பம்பி முதன் முதல் நீரிலிடப்படும்போது குழாயும் பீப்பாவும் வளியால் நிரப்பப்பட்டிருக்கும்; நீர் பீப்பாவுக்குள் எழுதற்கு இவ்வளி வெளியே பம்பிக்கப்பட வேண்டும்.

தொடக்கத்தில் முசலம் பீப்பாவின் அடியிலிருக்குமென உத்தேசிக்க.

முதலாவது மேலடிப்பில் குழாய்க்குள் உள்ள வளி விரிந்து அதன் ஒரு பாகம் U வால்வுக்கூடாக பீப்பாவுக்குட் செல்லும்; அமுக்க ஒடுக்கம் ஒரு நீர் நிரலைக் குழாய்க்குள் எழச் செய்யும்.

முதலாவது கீழடிப்பில் U வால்வு அடைபடும்; பீப்பாவுக்குள் உள்ள வளி வளிமண்டல அமுக்கத்திற்கு நெருக்கப்பட அது V யிற்கூடாகத் தப்பத் தொடங்கும்.

அடுத்துவரும் மேலடிப்பில் குழாய்க்குள் உள்ள வளி மீண்டும் U வால்வுக் கூடாக உருளைக்குள் விரிய அமுக்க ஒடுக்கம் நீரைக் கூடுதலாகக் குழாய்க் குள் எழச் செய்யும். நீர் இறுதியிற் பீப்பாவை அடையும்வரை இச் செய்கை நடைபெறும்; பின்னர் நீர்ப்பம்பியாக தொடர்ந்து தொழிற்படத் தொடங்கி ஒவ்வோரடிப்பிலும் பீப்பாவின் கனவளவுக்குச் சமனான நீரின் கனவளவு ஏற்றப்படும்.

உதாரணம் 1. **முசலத்தின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு 100 சதுர சதம மீற்றரும் கிணற்றிலுள்ள நீர்ப்பரப்பின்மேல் தூம்பின் உயரம் 10 மீற்றருமாயின் (முசலத்தின் நிறையைப் புறக்கணித்து) முசலத்தை உயர்த்தற்கு வேண்டிய விசையைக் காணல்.**

x சமீ. தூம்பின் கீழ் முசலத்தின் ஆழமும், h சமீ. நீர்ப்பாரமானியின் உயரமும் ஆகுக. ஆயின முசலத்தின் மேலும் கீழும் அமுக்கங்கள் முறையே

$$(h+x),\ \{h-(1000-x)\}\quad \text{சமீ.}$$

உயரங்களுள்ள நீர் நிரல்களால் ஆய அமுக்கங்களாகும். ஆகவே அவற்றின வித்தியாசம் 1000 சமீ. உயரமுள்ள நீர் நிரலால் ஆய அமுக்கம் ஆகும். ஆகவே முசலத்தினது இரு பக்கங்களிலும் அமுக்க வித்தியாசம்

$$=1000 \text{ கிராம்/சதுர சமீ.}$$

முசலத்தின் பரப்பளவு $=100$ சதுர சமீ;

$\therefore$ முசலத்தில் விளையுள் விசை $=1000\times 100$ கிராம் $=100$ கி. கி.

உதாரணம் 2. **தூம்பு நீர்ப்பரப்பின்மேல் 10 அடியிலிருக்க ஒவ்வோர் அடிப்பிலும் 5 இரு. நீர் வெளியே செலுத்தப்படுமாயின் மேலடிப்பிற் செய்யப்படும் வேலையைக் காணல்.**

அடிப்பின் நீளம் l அடி ஆகி முசலத்தின் வெட்டுப் பரப்பளவு A சதுர அடி ஆகுக.

முசலத்தின் இரு பக்கங்களிலும் அமுக்க வித்தியாசம்

=10 அடி நீர் நிரலால் ஆய அமுக்கம்

=10,000 அவு./சதுர அடி.

=10,000/16 இரு./சதுர அடி;

∴ முசலத்தில் விளையுள் உதைப்பு$=10,000\times A/16$ இரு.;

∴ மேலடிப்பிற் செய்யப்படும் வேலை$=10,000\times Al/16$ அடி இரு.

இனி Al=தூம்புக்கு ஏற்றப்படும் நீரின் கனவளவு (கனஅடியில்);

∴ $1000\ Al$=ஏற்றப்படும் நீரின் நிறை (அவுன்சில்);

∴ $1000\ Al/16$=ஏற்றப்படும் நீரின் நிறை (இருத்தலில்)

=5 இரு. (தரவின்படி);

∴ மேலடிப்பிற் செய்யப்படும் வேலை $= 5 \times 10$ அடி இரு.

= 50அடி இரு

இது 5 இரு நீரை 10 அடி மொத்த உயரத்திற்கூடாக உயர்த்தற்கு வேண்டிய வேலையாகும்.

ஆகவே பம்பியாற் செய்யப்படும் வேலை நீரைக் கிணற்றின் அடியிலிருந்து தூம்புக்கு நேரடியாக உயர்த்தல் போலாகும். இது சக்திக்காப்புக் கோட்பாட்டோடு இசைவாகும்.

உதாரணம் 3. பீப்பாவின் அடி நீர்ப்பரப்பின்மேல் 20 அடி உயரத்தில் இருக்க குழாயின் வெட்டு பீப்பா வெட்டின் $\frac{1}{5}$ ஆகும்; நீர்ப்பாரமானியின் உயரம் 33 அடி எனத் தரப்படுமாயின் முசலம் 1 அடி ஏற்றப்படுமிடத்து நீரின் உயரத்தைக் காண்க.

நீரின் வேண்டிய உயரம் x அடி ஆகுக.

மேலடிப்பின் முன்னர் வளி 33 அடி நீர் அமுக்கத்திற்கு குழாயின் 20 அடியை இடங்கொள்ளும்.

மேலடிப்பின் பின்னர் வளி குழாயின் $(20-x)$ அடியையும் பீப்பாவின் கனவளவையும் $(33-x)$ அடி நீர் அமுக்கத்தில் இடங்கொள்ளும்.

இனி, பீப்பாவில் வளியின் கனவளவு சமநீளமான குழாயினது கனவளவின் 5 மடங்காதலால், அது 5 அடி குழாயின் கனவளவாகும்.

ஆகவே வளி இடங்கொள்ளும் மொத்தக் கனவளவு குழாயின் $(20-x+5)$ அடிக்குச் சமானமாகும்,

ஆகவே போயிலின் விதியால்:

$$20\times 33=(25-x)(33-x);$$

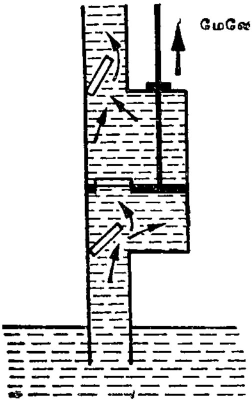
$$\therefore\ x^2-58x+165=0;$$

$$\therefore\ x=55 \text{ அல்லது } 3.$$

சாத்தியமான ஒரே தீர்வு $x=3$ ஆகும்; நீர் 3 அடி எழும்.

84. உயர்த்தும் பம்பி

பம்பியின்மேல் வேண்டிய உயரத்திற்கு நீரை ஏற்றற்கு இது பொதுப் பம்பியின் ஒரு திரிவு ஆகும்.



படம் 138

பீப்பாவின் உச்சி (படம் 138) பொதுப் பம்பியிலுள்ளது போலத் திறந்திராது அதற்கு ஒரு மூடி உண்டு ; இம்மூடியிலுள்ள ஓர் இறுக்கமாகப் பொருந்தும் வளையததிற்கூடாக முசலக் கோல் செல்லும். பீப்பாவிலிருந்து ஒரு குழாய், சந்திப்பில் ஒரு வால்வைக் கொண்டு மேன்முகமாகச் செல்லும்.

மேலடிப்பில் முசலத்தின் மேலுள்ள நீர் மேற் குழாய்க்கு உயர்த்தப்பட்டுப் பீப்பாவுக்குள் முசலத்தின் கீழ் நீர் கூடுதலாக இழுக்கப்படும்.

கீழடிப்பில் மேல் வால்வும் கீழ் வால்வும் அடைபட நடு வால்வு (முசலத்திலுள்ள) திறந்து முசலத்தின கீழுள்ள நீர் பீப்பாவின் மேற்பாகத்திற்குச் செல்தற்கு இடங்கொடுக்கும்.

முசலத்துக்கு மேல் நீர் உயர்த்தப்படக்கூடிய உயரத்திற்கு எல்லையில்லை ஆனால் பொதுப் பம்பியில் உள்ளதுபோல் முசலத்தின் கீழ் உள்ள நிரலின் உயரம் பம்பிக்கப்படும் திரவத்தைக்கொண்ட பாரமானியின் உயரத்திலும் பெரிதாகப்படாது.

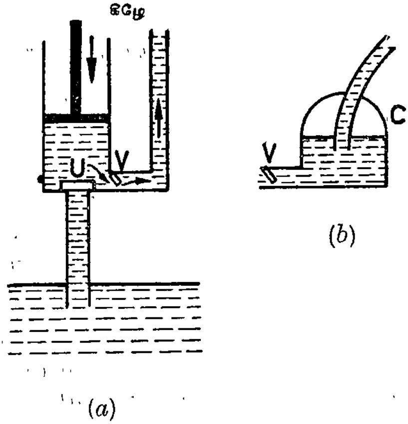
85. செலுத்தற் பம்பி

ஒரு திண்ம முசலத்தையும், [படம் 139(a)] வெளிவிடும் குழாய் பீப்பாவின் அடியிலிருந்து அப்பாற் செல்வதுடன் தொடுப்பில் ஒரு வால்வையும் (V) கொண்டிருத்தலால் இப்பம்பி பொதுப் பம்பியிலிருநது வேறுபடும்

மேலடிப்பில் வால்வு V அடைக்கப்பட வால்வு U திறந்து நீர் பீப்பாவுக்குள் இழுக்கப்படும்.

கீழடிப்பில் [படம் 139 (a) யிற் காட்டியுள்ளதுபோல்] வால்வு U அடைக்கப்பட V திறந்து நீர் வெளிவிடும் குழாய்க்கூடாகச் செலுத்தப்படும். முசலம் உயர்த்தப்படும்போது வெளிவிடுங் குழாய்க்கூடாக நீர் செலுத்தப்படாததால் இது இடையிட்ட பாய்ச்சலை விளைவிக்கும். இது ஒரு பெரிய குறையாகும் ; இக்குறையை ஓரளவுக்கு ஒழித்தற்கு பீப்பாவின் அடியிலுள்ள V என்னும் வால்வுக்கூடாக நீரை C என்னும் ஓர் அறைக்குட் செலுத்தி [படம் 139 (b)] வெளிவிடும் குழாய் இவ்வறையிலிருந்து வெளிவரச் செய்யலாம். ஆயின், இவ்வறையில் நீர் வெளிவழிக்

குழாயின் அடியை அடையுமிடத்து ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு வளி உள்ளடைக்கப்படும். நீர் வெளிவழிக் குழாய்க்கூடாகச் செல்லுதலினும் பார்க்கக் கூடிய விரவாய் நீர்பம்பிக்கப் படுமாயின் அறைக்குள் வளி நெருக்கப்பட்டு இவ்வளியின் அமுக்கம், முசலம் ஏற்றப் படுகையில், வெளிவழிக் குழாய்க் கூடாகச் சீரான பாய்ச்சலை நடைபெறச் செய்யும்.



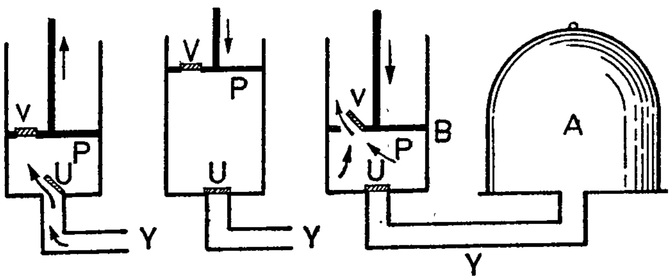
(a) (b)

படம் 139

86. வளிப் பம்பி.

இது நீருக்குப் பதிலாக வளியை வெளியே பம்பித்தற்கு வழங்கப் படும் ஒரு பொதுப் பம்பியாகும்.

வளி ஒழிக்கப்பட வேண்டிய பாண்டம் வாங்கி (A) எனப்படும்; பம்பியானது தனக்குள் இயங்கும் ஒரு முசலங்கொண்ட உருளையால் (B) ஆக்கப்படும்; உருளையிலும் முசலத்திலும் வாங்கியிலிருந்து வெளிமுகமாகத் திறக்கும் வால்வுகள் உண்டு. பம்பி தொழிற்படும் முறையை விளக்கிக்கூறுதற்கு படம் 140 இல் முசலம் பீப்பாவின் அடியிலிருக்குமென உத்தேசிக்க.



(a) (b) (c)

படம் 140

மேலடிப்பில் [படம் 140 (a)] வால்வு V அடைக்கப்படும் வாங்கியிலுங் குழாயிலுமுள்ள வளி U வால்வை உயர்த்தி அதன் ஒரு பாகம் பீப்பாவுக்குட் செல்லும். ஆகவே மேலடிப்பின் இறுதியில் பீப்பா வாங்கியில் விடப்பட்டுள்ள வளியின் அதே அமுக்கமும் அதே அடர்த்தியுமுள்ள வளியால் நிரப்பப்படும்.

கீழடிப்பின் முதலாம் பாகத்தில் [படம் 140 (b)] U வால்வு அடைக்கும். **முசலத்தின் கீழுள்ள வளி நெருக்கப்பட்டு அதன் அமுக்கம் வளிமண்டல அமுக்கத்திற்குச் சமனுகும்வரை** V **வால்வும் அடைபட்டிருக்கும்.**

கீழடிப்பின் மீதியில் [படம் 140 (c)] முசலவால்வு V திறந்து முசலத் தின் கீழிருந்து வளி தப்புதற்கு இடங்கொடுக்கும்.

n அடிப்புக்களின் பின்னர் வாங்கியில் விடப்பட்டிருக்கும் வளியின் அடர்த்தியையும் அமுக்கத்தையுங் காணல்.

வாங்கியினதும் தொடுக்குங் குழாயினதும் கனவளவு A யும், பீப்பா வின் கனவளவு B யும ஆகும். D என்பது வாங்கிக்குள் தொடக்கத் திலுள்ள வளியின அடர்த்தியாகுக. d_1, d_2, $\ldots d_n$ என்பன முறையே 1, 2, $\ldots n$ அடிப்புக்களின் பின்னர் விடப்பட்டிருக்கும் வளியின் அடர்த் திகளாகுக.

முதலாவது மேலடிப்பின் பின்னர் தொடக்கத்தில் வாங்கியில் உள்ள வளி A என்னுங் கனவளவிலிருந்து A+B என்னுங் கனவளவுக்கு விரியும. ஆகவே அதன் திணிவு மாருதிருததலால் அதன அடர்த்திகள்

$$d_1\ (A+B)=DA$$

எனனுந் தொடர்பாலே தொடுக்கப்படும் ;

$$\therefore\quad d_1=D\,\frac{A}{A+B}.$$

கீழடிப்பில் வாங்கியில் விடப்பட்ட வளி d_1 என்னும் அதே அடர்த்தியில் மாருதிருக்கும். ஆனுல் அடுததுவரும் மேலடிப்பில் அதன் கனவளவு மீணடும் A யிலிருந்து A+B இற்கு விரியும். ஆகவே அதன் அடுத்து வரும் அடர்த்திககு

$$d_2(A+B)=d_1\,A \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

$$\therefore\ d_2=d_1\frac{A}{A+B}=D\left(\frac{A}{A+B}\right)^2.$$

மூன்ருவது அடிப்பில் வாங்கியில் விடப்பட்ட வளியின் கனவளவு மீண் டும் A யிலிருந்து A+B யிற்கு விரிதலால் :

$$d_3\ (A+B)=d_2\,A\ ;$$

$$\therefore\quad d_3=d_2\ \frac{A}{A+B}=D\ \left(\frac{A}{A+B}\right)^3.$$

இதே மாதிரித் தொடந்து செய்ய வளியின் அடர்த்தி ஒவ்வொரு மேலடிப் பிலும் A: A+B என்னும் விகிதத்தில் ஒடுங்கி n அடிப்புக்களின் பினனர் அது

$$d_n=D\ \left(\frac{A}{A+B}\right)^n$$

என்பதாலே தரப்படுமெனபது வெளிப்படையாகும்.

ஆனால், $\dfrac{n \text{ அடிப்புக்களின் பின்னர் வாங்கியில் அமுக்கம்}}{\text{வளிமண்டல அமுக்கம்}} = \dfrac{d_n}{D}$

ஆதலால்

n அடிபபுக்களின் பின்னர் வாங்கியில் அமுக்கம்

$$= \left(\frac{A}{A+B}\right)^n \text{ வளிமண்டலம்.}$$

உதாரணம் 1. பீப்பாவின் கனவளவும் வாங்கியின் கனவளவும் 25 கன அங்குலமும் 75 கன அங்குலமுமாகும் ; மூன்று அடிப்புக்களின் பின்னர் மிகுதியாக விடப்பட்டுள்ள வளியின் அமுக்கத்தைக் காணல்.

முதலாவது மேலடிப்பில் வளிமண்டல அமுக்கத்திலுள்ள 75 கன அஙகுல வளி பீப்பாவையும் வாஙகியையும், அதாவது 100 கன அங்குலத்தை, நிரப்பும்வரை விரியும்.

$\therefore$ அடிப்பின பினனா அமுக்கம் $= \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ வளிமண்டலம்.

தொடர்ந்து வரும் ஒவ்வொரு மேலடிபபிலும் வாங்கியில் மீதியாகவுளள வளி 75 கன அங்குலத்திலிருந்து 100 கன அஙகுலததிறகு விரிதலால் அதன் அமுக்கம் முனனுள்ள $\frac{3}{4}$ அமுக்கத்திற்கு ஒடுக்கப்படும்.

$\therefore$ 3 அடிப்புக்களின் பின்னர் அமுக்கம் $= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

$$= (\tfrac{3}{4})^3 = \tfrac{27}{64} \text{ வளிமண்டலம்.}$$

உதாரணம் 2. பீப்பாவின் கனவளவு வாங்கியின் கனவளவின் ஐந்தில் இரு பங்காகும். அடர்த்தியைத் தொடக்க அடர்த்தியின் மூன்றிலொரு பங்கிலுஞ் சிறிதாக்கற்கு எத்தனை அடிப்புக்கள் வேண்டுமெனக் காணல்.

இங்கு $\quad B = \dfrac{2}{5} A \; ; \quad \therefore \quad \dfrac{A}{A+B} = \dfrac{5}{5+2} = \dfrac{5}{7}.$

இனி, $\quad (\frac{5}{7})^2 = \frac{25}{49} > \frac{1}{3}, \; (\frac{5}{7})^3 = \frac{125}{343} > \frac{1}{3}, \; (\frac{5}{7})^4 = \frac{625}{2401} < \frac{1}{3}.$

ஆகவே 4 அடிப்புக்கள் வேணடும்.

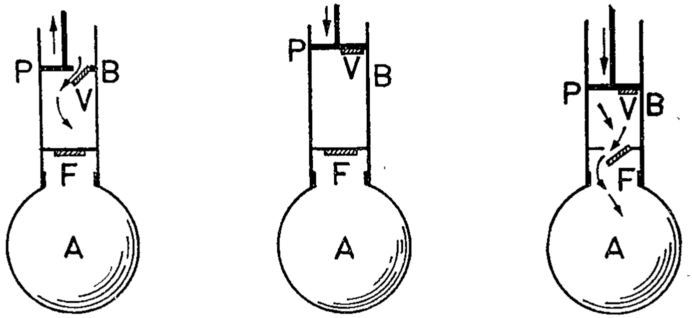
87. ஒடுக்கி அல்லது ஒடுக்கும் பம்பி

இது சாதாரண சைக்கிட் பம்பி ஆகும. ஒரு பாணடத்தில் அல்லது வாங்கியில் வளியமுககம் அதிகரிக்கச செய்தறகு வழங்கபபடும். B என்னும் ஒரு பீப்பாவையும் அதனுள் இயங்கும் P என்னும் ஒரு முசலத்தையும் இதுகொண்டிருககும். இபபீபபாவின ஒரு முனை வளி நெருக்கபபட வேண்டிய A எனனும் பாண்டததோடு தொடுககப்படும்.

இப்பாண்டம் **வாங்கி** எனப்படும், இது படம் 141 இற் காட்டப்பட்டுள்ளது.

முசலமும் பீப்பாமுனையும வெளியே உள்ள வளியிலிருந்து வாங்கி **முகமாகத்** திறக்கும் V, F எனனும் வால்வுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

பின்முக அடிப்பில், அதாவது முசலம் பின்முகமாக இழுக்கப்படுமிடத்து [படம் 141 (a)], வாங்கியிலுள்ள அமுக்கத்தால் F என்னும் வால்வு அடைக்கப்பட்டு வளிமண்டல அமுக்கத்திலுள்ள வளி V எனனும் வால் வுக்கூடாக முசலத்தின முற்பக்கத்திற்குச் சென்று பீப்பாவை நிரப்பும்.



(a) (b) (c)

படம் 141

முன்முக அடிப்பின் தொடக்கத்தில் [படம 141 (b)] V, F ஆகிய இரு வால்வுகளும் அடைககபபட்டுப பீப்பாவில் உள்ள வளியானது முதலடிப்புத தவிர்ந்த மற்ற அடிப்புகளுககு அதன் அமுககம் வாஙகியிலுளள அமுக்கததிற்குச் சமனுகும்வரை நெருக்கப்படும். முதலடிப்பின் போது வாஙகிக்குள் உளள வளியானது வளிமணடல அமுககத்தில இருததலால் F ஆனது உடனடி யாகத் திறக்கும்.

முன்முக அடிப்பின் மீதியில் [படம 141 (c)] வாலவு F திறக்கபபடடு அதற்கூடாக வளி வாங்கிககுட செலுத்தப்படும்.

பின்வருவனவறறில பம்பிமுசலத்தின முன்முக அடிப்பும் பின்முக அடிப்பும் ஒருஙகு சோநது பம்பியின **ஒரு முற்றுன அடிப்பை** ஆக்குமெனக் கருதப்படும.

உதாரணம் 1. **வாங்கியின் கனவளவு 80 கன அங்குலமும் பீப்பாவின் கனவளவு 20 கன அங்குலமுமாகும். வாங்கியில் வளியமுக்கம் 3 வளிமண்டலமாக முன்னர் எத்தனை அடிப்பு ஆக்கவேண்டுமெனக் காணல்.**

போயிலின விதியால் வாங்கியில் அடர்த்தி வளிமண்டல அடர்த்தியின் மூன்று மடங்காகும். ஆகவே வாங்கியிலுள்ள வளியானது வளிமணடல அமுக்கத்தில 240 கன அங்குல இடத்தைக் கொள்ளும்.

$\therefore$ 160 கன அங்குல வளி உட்செலுத்தப்பட்டுள்ளது.

ஆனால் ஒவ்வொரு பின்னடிப்பிலும் 20 கன அங்குல வளி பீப்பாவுக் குட் சென்று முன்னடிப்பில் வாங்கிக்குட் செலுத்தப்படும்.

∴ முழுமையான அடிப்புகளின தொகை $=\frac{160}{20}=8$.

உதாரணம் 2. **அடுத்துவரும் முன்னடிப்பில் பீப்பாவிலுள்ள வால்வு எப்போது திறக்கு மெனக் காணல். (உதாரணம் 1 ஐப் பார்க்க)**

F என்னும் வால்வு திறத்தற்கு பீப்பாவிலுள்ள வளியின அமுக்கம் 3 வளி மண்டலமாக வேண்டும், அதாவது அதன கனவளவு தொடக் கக் கனவளவின் மூன்றிலொரு பங்காகவேண்டும், அல்லது முசலம் பீப்பாவினுடைய நீளத்தின மூன்றிலிரு பங்கைக் கடக்கவேண்டும்.

முழு அடிப்புக்களின் பின்னர் வாங்கியில் அடர்த்தியையும் அமுக்கத்தையும் காணல்.

A யானது வாங்கியின கனவளவும், B யானது பீப்பாவின் கனவளவும், D யானது வளிமண்டலத்தின அடர்த்தியும, d யானது n அடிப்பின் பின் னா வாங்கியில் அடர்த்தியுமாகுக.

ஆயின் வாங்கி தொடக்கத்தில AD என்னுந் திணிவுள்ள வளியைக கொண்டுள்ளது.

ஒவ்வொரு பின்னடிப்பிலும் D என்னும் அடர்த்தியுள்ள வளியின் B என்னுங் கனவளவு பீப்பாவுக்குட் செல்லும். முன்னடிப்பில் இவ் வளி வாங்கிக்குட் செல்லும. ஆகவே n முழு அடிப்புக்களின் பின்னர்

வாங்கியிலுள்ள வளியின திணிவு $=(A+nB)\,D$.

ஆனால் அதன் கனவளவு $= A$;

∴ அதன் அடர்த்தி $d = \dfrac{A+nB}{A}\,D=\left(1+n\dfrac{B}{A}\right)D$.

ஆகவே

$$\text{வாங்கியில் அமுக்கம்} = \left(1+n\frac{B}{A}\right) \text{ வளிமண்டலம்.}$$

பயிற்சி XI

1. ஓர் இறையி நீரால நிரப்பப்பட்டு 1·6 என்னுந தன்னீர்ப்புள்ள திரவங்கொண்ட பாண்டத்தில தலைகீழாக்கப்படும். இறையியிக்கூடாக நீர் பாய்தற்கு நிபந்தனை யாது?

2. 500 கன அடி கொள்ளளவு உள்ள ஓர் ஆழ் மணி அதன வாய் பரப்பின் கீழ 51 அடி ஆழத்தில் இருக்குமவரை நீரில தாழ்த்தப்படும். நீர் முற்றாய் வெளியேற்றப்பட்ட வளிமண்டல அமுக்கத்தில எவ்வளவு வளி உட்பமபிக்கப்பட வேண்டும?

3. 200 கன அடி கனவளவும 8 அடி உயரமுமுள்ள ஓர உருளைவடிவான ஆழ் மணியின் உச்சி நீர்ப்பரப்பின கீழ் 60 அடி ஆழத்தில் இருக்கும். ஆழ் மணி முழுதும வளியால நிரப்பப்பட்டிருத்தற்கு வளிமண்டல அமுக்கத்தில எவ்வளவு வளி உட்பம்பிக்கப்பட வேண்டும்?

4. 8 அடி உயரமான ஓர் ஆழ் மணி அதன் உச்சி பரப்பின் கீழ் 60 அடி ஆழத்தில இருக்கும்வரை நீரில தாழ்த்தப்படும். எனின என்ன ஆழம் உள்ள நீர் மணிக்குட் செல்லும?

5. ஓர் ஆழ் மணி அதன் மூன்றிலிரு பஙகு நீரால நிரபபப்படும்வரை ஒரு குளததில் தாழ்ததபபடும். d யானது பரப்பின கீழ் மணி உசசியின் ஆழமாயின, மணியின் உயரம $3(2h-d)$ எனக காட்டுக ; இங்கு h ஆனது நீரபபாரமானியின் உயரமாகும.

6. நீர்ப்பாரமானியின உயரம 33 அடி 8 அங்குலமாகுமிடத்து ஒரு பொதுப் பமபி ஓா எண்ணெய்க கிணற்றிலிருநது பெற்றோல ஏற்ற வழங்கபபடுமாயின், பம்பியின் கீழ் வாலவு கிணற்றிலுள்ள எண்ணெயின் பரபபுக்கு மேல் வைக்கப்படக்கூடிய மிகப் பெரிய உயரததைக் காண்க. (பெற்றோலின் தன்னீர்ப்பு 0·8 ஆகும்)

7. ஓர் ஒடுககியினது வாஙகியின் கனவளவும பீப்பாவின் கனவளவும் 5:1 என்னும விகிததகிலுள்ளது. 3 முழு அடிப்புககளின் பினனா வாஙகியிலுள்ள வளியின அடாத்தியைக் காணக.

8. ஓர் ஒழிக்கும வளிப் பமபியினுடைய வாங்கியின கனவளவு பீபபாவினுடைய கனவள வின 9 மடஙகாயின் வாஙகியிலுளள வளியின் அடர்ததி வெளி வளியின் அடர்ததியின் மூனறிலொன்றுக முன்னா எததனை அடிபபுககள ஆககப்பட வேண்டும்?

9. உருளை வடிவஙகொணட ஓா ஆழ மணி தநத ஆழத்திற்கு ஆழ்ததப்படும. நீர் மணிககுள எழாதபடி இருக்க உளளடைத்த வளியின் வெபபநிலை எவவளவால ஏறறபபட வேணடும?

10. தன் செயபொருளின கனவளவும அடாத்தியும் v, w' எனபனவும், தன் குறுக்கு வெட்டு பரபபளவு A எனபதும ஆகுமாறு உளள ஓா உருளைக கிண்ணம w என்னும அடாததியுளள திரவத்துககுள வாய் கிழமுகமாகச செலுததபபடும் ; கிணணததிறகுள உள்ள வளி நிரலின நீளம்

$$\frac{v}{A}\left(\frac{w'}{w} - 1\right)$$

எனனும பெறுமானத்தை அடையும்போது கிணணம ஆழததறகு நாடுமென நிறுவுக.

11. நீாப்பரபபில வளியின வெபபநிலை 27°ச. எனவும, நீர்பபாரமானியின் உயரம 33 அடியெனவும, நீரின் வெபபநிலை 7°ச. எனவும் தரப்படுமாயின், 12 அடி உயரமான ஓர் உருளை ஆழ மணி தன் உசசி 60 அடி ஆழததில இருககுமாறு தாழ்த்தப்படும்போது மணிககுள் நீா எழும் உயரத்தைக கணிக்க.

12. வளிமணடல அமுககததில வளிகொணட 1 அடி நீளமுளள பாரமானிக குழாய கடலுககுள அதன் அடைத்த முனை மேலாகுமாறு நிலைகுத்தாய்த தாழ்த்தப்பட்டுள ளது. அது மீணடும பரபபை அடையும்போது நீரானது குழாயக்குள 10 அஙகுல உயரததிறகு எழுந்ததாகக காணபபட்டுளளது. இரசப பாரமானியின் உயரம 30 அங்குலமெனவும் இரசததின் தனனீாபபு 13·6 எனவும் கடல் நீரின் தன்னீர்ப்பு 1·025 எனவும எடுததுககொணடு குழாயடைநத ஆழத்தைக காணக. (*H.S.C.,I.*)

13. சிறு துவாரமுளள சீரான ஒரு உலோகக் குழாய் ஒரு முனையில அடைககபபட்டு ஒரு வட்டததினுடைய பரிதியின் முக்கால பஙகின் வடிவத்திறகு வளைககபபடும். அது ஒரு நிலைகுததுத் தளத்தில அதன அடைதத முனை வட்டததின மிக உயாநத புளளியி லிருககுமாறு வைககபபட்டு மேறபாயும்வரை திரவம் உளளே வார்ககபபடும. உளளடைதத வளி 16 அடி நீளததையுடைய குழாயின அரைபபஙகை இடங்கொளளு மாயின் திரவத்தின் தனனீர்பபைக காணக. நீர்பபாரமானியின் உயரம் 33 அடி எனக கொள்க.

14. ஒரு மோட்டார் வண்டியின் புவியீர்ப்பு மையம் இரண்டு அச்சாணிகளினுமிருந்து சமதூரத்திலுள்ளது. ஒவ்வொரு சில்லின 25 சதுர அங்குலப் பரப்பளவு நிலத தைத தொடுமாயின ஒவ்வொரு சில்லிலுமுள்ள வளியின் அமுக்கத்தைக் காண்க.

ஒரு சில்லின் இரப்பர்க குழாயை ஊதசசெயத பின்னர் அது 2000 கன அங்குல கனவளவு உடையதாயின தொடககத்தில் வளி கொள்ளாதிருக்குமிடதது அதனை வேண்டிய அமுக்கததிற்கு ஊதச்செய்தறகு 25 கன அஙகுல உட்கனவளவு உள்ள பம்பியால் எததனை முழுமையான அடிப்புககள ஆககபபட வேண்டுமெனக் காணக. வளிமணடல அமுக்கம் 14·5 இரு. நிறை / சதுர அங. ஆக எடுததுககொண்டு தொடுப்பின கனவளவைப் புறககணிக்க.

15. ஓர் ஆழ் மணி h உயரமும் h விட்டமுங் கொணட ஒரு வட்டவுருளையின மேல h விட்ட முளள அரைககோளம் மேலேற்றப்பட்ட வடிவமாகும. அது நீரில தாழ்ததப்பட்டு யாதும் வளி பம்பிககபபடாதாயின நீர் உருளையை மட்டாய நிரப்புமிடத்து மணியின உச்சி யினது ஆழததைக காணக. நீரை உருளையிலிருந்து அகறறற்குப் பமபிக்க வேண்டிய வளியின் கனவளவு வளிமணடல அமுககத்தில் $\left(3+\frac{h}{\mathrm{H}}\right)\mathrm{V}$ எனக் காட்டுக ; இங்கு V ஆனது மணியின கனவளவும் H ஆனது நீர்ப்பாரமானியின் உயரமுமாகும்.

16. ஒரு வளிப பமபியினது வாஙகியின் கனவளவும் பீபபாவின கனவளவும A, B எனபனவாகும். ஓர் உடல வாங்கிகுள இடபபடுமபொழுது w அவு. நிறையாகி n அடிபபுக்களின் பின்னர் w_1 அவு. நிறையாகும். வெற்றிடததில் உடலின நிறையைக காணக.

அன்றியும் உடலின அடர்ததி ρ ஆயின் வாஙகியில் முதலிருந்த வளியின் அடாததி யைக காணக.

17. R கொளளளவு உடைய ஒரு வாஙகியோடு இரு பீப்பாக்கள் தொடுக்கபபடும் ; ஒனறு ஒடுககும மறறையது ஒழிககும. ஒடுக்கும பீபபா a கொளளளவும, ஒழிக்கும் பீப்பா b கொள்ளளவும் உடையன. அவற்றின அடிப்புககள ஒடுககியிலே தொடஙகி ஒனறு விட்டொனறாக வரும ; இரு பீபபாக்களின் n அடிபபுககளுககுப பினனா வாஙகியி லுளள வளியின் அடாததியை D எனனும வளிமண்டல அடாததியின சாாபாயக காணக.

18. 10 அடி நீளமுளள ஒரு பொட பரவளைவுரு வடிவததிலுள்ள ஓா ஆழ மணி, அதனுள நீா 5 அடி எழுமவரை அதன திறந்தமுனை கீழ முகமாகுமாறு நீரில ஆழ்ததப்படும. நிரபபாரமானி 33 அடியெனக கொணடு நீர்ப பரபபின் கீழ உசசியின் ஆழததைக காணக.

19. வளி கொணடதும r ஆரையுமுள்ள தலைகீழாகிய ஓா அரைக்கோளம இரசத்தில் மடடாய உளளாழததபபடுமாறு கீழச செலுததபபடும. அரைக கோளததிறகுள இரசம x தூரம் எழுமாயின இரசப பாரமானியின உயாம் h ஆகுமிடதது x ஆனது

$$x^4-(h+r)x^3-3r^2x^2+(3r^2h+5r^3)x-2r^4=0$$

என்னுஞ் சமன்பாடடாலே தரபபடுமெனக காட்டுக.

20. ஒரு பாரமான வளி போகாத முசலம் வளி கொணட ஒரு நிலைக்குத்தான உருளைககுட் சுயாதீனமாக வழுககும. தொடககததில முசலம ஓயவிலிருகக அதன் கீழுளள வளியின் அமுககம் வளிமணடல அமுக்கமாகும ; இவவளிகொணட உருளையின் நீளம h ஆகும. முசலம் இபபோது இறஙகவிடபபடும. அடியிலிருநது

$$\text{மட}_e\left(\frac{x}{h}\right)=\frac{h-x}{d}$$

என்னுஞ் சமனபாடடாலே தரபபடும x எனனுந தூரததில அது மீண்டும கணநிலை ஓயவுகொளளுமெனக காட்டுக. இங்கு d யானது அடியிலிருநது முசலம் சமநிலை கொள்ளுந தூரமாகும். போயிலின விதி உணமையாகுமெனவும் வெபபநிலையில மாறறம் இலலையெனவும கொளக.

விடை

1. பாண்டத்திலுள்ள திரவத்தின் மட்டத்தின்மேல மிக உயர்ந்த புள்ளியின் உயரம் $21\frac{1}{4}$ அடியிலுஞ் சிறிதாக வேண்டும.

2. 750 கன அடி.

3. 400 கன அடி.

4. 5·19 அடி.

6. 42 அடி 1 அங்.

7. 1·6.

8. 11.

9. $\frac{h}{H}(273+t)^\circ$; இங்கு H ஆனது நீர்ப்பாரமானியின் உயரமும், h ஆனது மணியினது அடியின ஆழமும t° ஆனது தொடக்க வெப்ப நிலையுமாகும்.

11. 8·2. அடி.

12. 165·7 அடி.

13. 13·746.

14. 28 இரு. நிறை / சதுர அங்., 155.

15. $3H - \frac{1}{2}h$.

16. $\frac{w_1(A+B)^n - wA^n}{(A+B)^n - A^n}$, $\frac{(w_1 - w)(A+B)^n}{w_1(A+B)^n - wA^n}\cdot\rho$.

17. $D\left\{\frac{a}{b} + \left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(\frac{R}{R+b}\right)^n\right\}$.

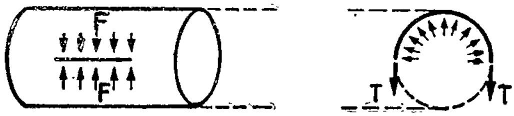
18. 94 அடி.

அதிகாரம் XII

குழாய்களில் இழுவை

88. ஒரு வாயுவைக்கொண்ட உருளைப் பாண்டத்தின் சுவர்களில் இழுவை

மெல்லிய வளைதகு பதார்த்தத்தால் ஆக்கப்பட்டதும் ஒரு குறித்த அமுக்கத்தில் வாய்வைக் கொண்டதுமான ஒருருளைப் பாண்டத்தை எடுத்து நோக்குக. வாயு அமுக்கத்தின செறிவு உட்பரப்பு முழுவதிலும் சீராகும்.



(a) (b)

படம் 142

பரப்பில் உருளையின நீளத்திற்குச் சமாநதரமாக ஒரு கோடு வரையபபடுமென உத்தேசிகக [படம் $142(a)$] ; பரபபின் சடம் இக்கோட்டின் வழியேயோ ஒரு சமாநதரக கோட்டின் வழியேயோ பிளத்தலைத் தடுததற்குச சடத்தின் நார்களின் வலிமை F *என்னும் விசைகளைத் தர வேணடும். ஆயின உருளையின யாதும ஒரு தள வடட வெட்டில உள்ளடைதத வாயுவின் அமுக்கத்தைச் சார்ந்த பரிதி விசைகள இருக்க வேண்டும். உருளையின் ஓரலகு நீளத்திலுள்ள பரிதி விசையானது* **பரிதி இழுவை அல்லது வளைய இழுவை** *எனபபடும். அலகு நீளத்திற்கு (அஙகுலத திற்கு) இவ்விசை* T *இரு. நிறை ஆகுக ; உளளடைத்த வாயுவின் அமுககம்* p *இரு. நிறை/சதுர அங. ஆயின்,* T *என்பதைப் பின்வருமாறு நாம் பெறலாம். படம்* $142(b)$, *உருளையின் மேற்பாகததின் ஓரலகு நீளத திலே தாக்கும் விசைகளைக காட்டும. இவ்விசைகளை நிலைக்குத்தாகத் துணித்து நாம் வளைய இழுவையைப் பெறுவோம். உருளையின் ஆரை* r *ஆயின அதிகாரம்* VII *இலிருந்து மேனமுக விசை (அலகு நீளத்திறகு)* $p.2r$ *இரு. நிறையாகும். எணவே*

$$2T = 2pr,$$

$$\therefore \quad T = pr.$$

இதற்கும் மேலாக, எவ்வட்ட வெட்டும் பரிதியின் வழியே பிளததலைத் தடுத்தற்கும் சடமானது S *எனனும்* **விசைகளைத்** *தரவேண்டும [படம் $143(a)$].*

ஆயின் பரப்புச் சடத்தில் ஒரு **நெட்டாங்கு இழுவையும்** உண்டு ; ஓரலகு நீளத்திலுள்ள நெட்டாங்கிழுவை L என்பதாற் குறிக்கப்படுமாயின், ஒரு தள முனையின் சமநிலையை எடுத்து நோக்கி அதன் பெறுமானத்தை நாம் துணியலாம் [படம் 143(b)].



(a) (b)

படம் 143

ஒரு தள முனையில வாயுவால் ஆய விளையுள உதைப்பு $\pi r^2.p$ ஆகி $2\pi r$ எனனும் நீளமுளள வட்ட முனையின் பரிதியைச் சுற்றி ஒவ்வோர் அலகு நீளத்திலுந தாக்கும் L என்னும் நெட்டாங்கிழுவையாற் சமப படுத்தப்படும். ஆகவே

$$2\pi r L = \pi r^2 p,$$

$$\therefore \quad L = \frac{pr}{2}.$$

ஆகவே நெட்டாங்கிழுவையானது வளைய இழுவையின அரைப பஙகாகும்.

முனனுளள கொள்கையில் உருளைககு வெளியே வாயு இலலை எனவும், இதன பயனுய் உருளையின புறததில் யாதும அமுககம் இல்லை எனவும எடுககப்பட்டது.

உணமையிற புறததே P எனனும் வளிமண்டல அமுக்கம் உண்டெனின் உருளையின் உடபரப்பில விளையுள் அமுக்கம் $p-P$ ஆகி

$$T = (p-P)\,r,$$

$$L = \tfrac{1}{2}(p-P)\,r \text{ எனப் பெறப்படும்.}$$

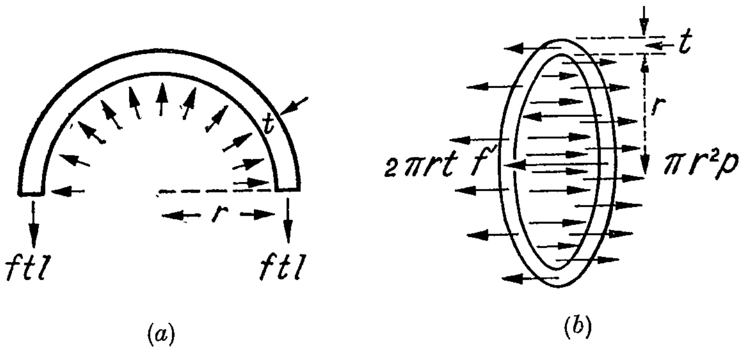
89. திரவங்கொண்ட மெல்லிய குழாயில் இழுவை

குழாய கிடையாய் இருக்கும வகையை மடடுமே நாம் கருதுவோம. திரவத்திற சிறிதளவு வேறுகும் ஆழஙகள காரணமாய திரவததிலுள்ள அமுகக விததியாசஙகள் புறககணிககப்படுமாறு போதிய அளவு பெரிய அமுககத்தில் திரவம உண்டு என உததேசிப்போம. ஆகவே, குழாயின உடபரப்பு முழுவதிலும் அமுககம சீரானதெனக கொள்வோம். அமுககம பெரிதாகவோ குழாயின விடடம் சிறிதாகவோ அலலது இரண்டு மாயோ இருபபின் இது ஏறககுறைய உண்மையாகும.

ஆயின, செயன்முறை செப்பமாய் வாயுகளுககு உள்ளது போலாகும ; ஆனுல நாம சிறிய வரையறையுளள தடிப்புக்கொண்ட குழாயை எடுதது நோககுதலால பிரச்சினையைக் கூடுதலாக வரையறுத்துக் குழாயை ஆக்குஞ்

சடத்தில பரிதித் தகைபபுக்கும் நெட்டாங்குத் தகைப்புக்கும் கோவைகள் பெறலாம். "தகைப்பு" "இழுவைத் தகைபபு" என்னுஞ் சொற்களை நாம் முனனரே சநதித்துள்ளோம் ; எனினும் நாம் மீண்டும் அவறறை இங்கே எடுத்து நோக்குவோம். உதாரணமாக, 3 சதுர அங்குலக குறுக்கு வெட்டுள்ள சீரான ஒரு உலோகக் கோல் 15 தொன நிறையுள்ள ஒரு விசையால் இழுவையில் வைககப்படுமாயின

$$\text{இழுவைத தகைப்பு} = \frac{15}{3} = 5 \text{ தொன்/சதுர அங்.}$$



படம் 144

r உள்ளாரையும், (r ஓடு ஒபபிடுமிடததுச் சிறிதாகும்) t தடிபபுள்ள ஒரு குழாயை எடுதது நோக்குக [படம 144(a)]. பரிதித் தகைப்பை அல்லது வளையத தகைபபைக காண்பதறகுச் செபபமாய் வாயுகொணட உருளைக்கு நாம் செய்ததுபோல, குழாய்க்கூடாக ஒரு வடட வெடடை எடுதது அதன அரைப் பங்கிலே தாக்கும் விசைகளை நோககுவோம். குழாயின l நீளததிற்கு ஒவவொரு பக்கத்திலும் குழாயின கீழ் அரைபபங்கோடு தொடுகையுளள உலோகததின பரப்பளவு tl சதுர அலகுகள ஆகும் (சதுர அங்குலஙகள என உததேசிக்க). ஆயின் உலோகததிற பரிதித் தகைப்பு f தொன/சதுர அங. ஆகுமிடதது, உடைதலைத் தடுக்கும் மொதத விசை $2ftl$ ஆகும். இது உடைவு விசையாகிய $2rl.p$ எனபதாற சமப்படுத்தபபடும. ஆகவே

$$2ftl = 2rlp,$$

அ—து.
$$f = \frac{pr}{t}.$$

f' எனனும் நெடடாங்குத் தகைப்பைத் துணிதறகு படம 144(b) என்பதைப் பார்கக. இது குழாயின தள முனையிலுள்ள விசைகளைக் குறிக்கும். திரவத்தாலாய, மொதத உடைவு விசை $\pi r^2 p$ ஆகும். t சிறியதாயின

குறுக்கு வெட்டிலுள்ள உலோகத்தின் பரப்பளவு $2\pi rt$ ஆகும். இப்பரப்பளவை f' என்பதாற் பெருக்க மொத்தத் தடுப்பு விசை பெறப்படும்.

$$\therefore \quad 2\pi rtf' = \pi r^2 p,$$

$$f' = \tfrac{1}{2}\frac{pr}{t}\ ;$$

ஆகவே நெட்டாங்குத் தகைப்பு வளையத் தகைப்பின் அரைப் பங்காகும்.

குழாய் மெல்லியதாக இருக்கவேண்டுமென நாம் ஒப்புக்கொண்டதற்குக் காரணம், ஒரு மெல்லிய குழாயில் உலோகத்தின் தடிப்பு முழுவதிலும் தகைப்பு சீரானதெனக் கொள்ளப்படலாமெனபதே. ஒரு தடித்த குழாயில் மையத்திறகுக கிட்டவுள்ள உலோக நாாகள் தூரத்திலுள்ளவற்றிலுங் கூடுதலாகத் தகைக்கப்படுதலால் இது அண்ணளவாகவேனும் உண்மையாகாது. தடிதத குழாயின் வலிமைபற்றிய கொள்கை இந்நூலிற்கு அப்பாறபட்டது. அதைப் பறறி நீரியல் நூல்களிற் படிக்கலாம்.

உதாரணம் 1. $\frac{1}{2}$ அடி உள் விட்டமும் $\frac{1}{2}$ அங்குலத் தடிப்பும் உள்ள ஓர் இரும்புக் குழாய் 1300 இரு./சதுர அங். ஆகிய உள்ளமுக்கத்தைத் தாங்கவேண்டும். வளையத் தகைப்பைக் காண்க.

$$\text{வளையத் தகைப்பு} = \frac{pr}{t}$$

$$= \frac{1300 \times 3}{\frac{1}{2}}$$

$$= 7800 \text{ இரு./சதுர அங்.}$$

உதாரணம் 2. 1 அடி உள் விட்டமுள்ள குழாயில் தகைப்பு சதுர அங்குலத்திற்கு 2000 இருத்தலிலும் பெரிதாக முடியாதெனின், சதுர அங்குலத்திற்கு 100 இருத்தல் உள்ளமுக்கத்தைத் தாங்குதற்கு யாது குழாய்த் தடிப்பு வேண்டும்.

$$\text{தடிப்பு} = \frac{pr}{f}$$

$$= \frac{100 \times 6}{2000} \text{ அங.}$$

$$= 0{\cdot}3 \text{ அங்.}$$

90. வாயுகொண்ட ஒரு கோளப் பாண்டத்தில் இழுவை

சமச்சீரால், கோளப பரப்பிலுள்ள இழுவை எங்கும் மாறுதிருக்க வேண்டும்.

கோளத்தின் ஓர் அரைப் பாகததிலே தாக்கும் விசைகளை எடுத்து நோககுக. அதன் ஆரை r ஆயும, அரைக்கோளத்தின் விளிம்பைச் சுற்றி இழுவை அலகு நீளததிற்கு T ஆயும் இருப்பின், அரைக்கோளத்

தின் விளிம்புக்குக் குறுக்காக மொத்த இழுப்பு $T.2\pi r$ ஆகும். கோளத்துக்குள் உள்ள வாயுவின் அமுக்கம் p யாயின, மொத்த வெளிமுக அமுக்கம் $\pi r^2.p$ ஆகும்.

$$\therefore \quad T.2\pi r = \pi r^2 p,$$

அ—து.
$$T = \tfrac{1}{2}pr.$$

இது ஒரு உருளையின வகையில் வளைய இழுவையின் அரைப் பங்காகும்.

இனி t தடிபபும் f தகைப்பும் உள்ள ஓர் உலோகக் கோளம் உண்டெனின் இச்சமன்பாடு தருவது

$$f.2\pi rt = \pi r^2 p,$$

அ—து.
$$f = \tfrac{1}{2}\frac{pr}{t}.$$

இக்கோவையை ஓர் உருளை வகையிலுளள வளையத் தகைப்போடு ஒப்பிடும்போது, ஓா உருளைக் கொதிகலம் அரைககோள முனைகள் உடையதாயின் அதே அமுக்கத்தைத் தாஙகுவதற்கு இம்முனைகளின் தடிப்பு உருளைப் பாகததடிப்பின அரைப பங்காக மாத்திரம் இருக்கவேண்டுமெனக் காண்போம். ஆனால ஆரையோடு ஒப்பிடும்போது தடிபபு சிறிதாய இருந்தால் மாததிரமே இது உணமையாகும். செய்முறையில தறைகளாலும் மூட்டுக்களாலும் ஆக்கப்பட்ட நொய்மையையும எடுத்து நோக்க வேண்டும்.

பயிற்சி XII

1. d அங்குல விட்டஙகொண்ட வட்டக குறுக்கு வெடடுளள சீரான ஒரு திண்மக் கோலில் P தொன் நிறையுடைய ஒரு இழுவை உண்டு. இழுவைத் தகைப்பின் செறிவு யாது ?

2. 1 அடி உள் விடடமுளள ஓா உருளை உலோகக் குழாயில் உலோகத்தின் தடிப்பு 0·2 அங்குலமாகும ; உலோகம் சதுர அஙகுலத்திறகு 9000 இருததல இழுவையைத தாங்குமாயின், அதைச சற்றே உடைத்தற்கு யாது பாயி அமுககம் வேண்டும்.

3. 7 அடி உள விட்டமுளள ஓர் உருளைக் கொதிநீராவிக கலததில் தட்டுககளின் தடிப்பு $\frac{1}{2}$ அங்குலமும் கொதிநீராவி அமுக்கம சதுர அஙகுலத்திறகு 120 இருததலுமாயின் வளையத தகைபபைக் காண்க.

4. கேளவி 3 இல, கொதி கலததின புறத்தே சதுர அங்குலத்திறகு 14·7 இருத்தலுள்ள வளிமண்டல அமுககத்தைக கணககில எடுத்தால வளையத தகைப்பு யாது ?

5. ஒரு உருளைக கொதிகலம் அதே உள்ளாரை உடைய அரைககோள முனைகள கொணடது. அது 10P என்னும் அமுககத்தில கொதிநீராவியைக் கொண்டிருககும ; இஙகு P யானது வளிமணடல அமுக்கமாகும். t_1 தடிப்புள்ள அரைககோள முனைகள வளிமண்டலத்திற்கு உளளாககபபட்டும், t_2 தடிப்புள்ள உருளைபபாகம 3P எனனும வெளி அமுக்கத்திற்கும் உளளாககப்படுமாயின, அரைக்கோள முனைகளிலுள்ள தகைப்பு உருளைப பாகததிலுளள வளையத் தகைப்புககு சமமாகுமாறு t_1 என்பது t_2 இற்குக கொளளவேணடிய விகிததததைக காண்க.

6. மெல்லிய சுவர்களும r உள்ளாரையும் உள்ள ஒரு இடைக குழாய் p என்னும் அமுக்கததில நீரால் நிரபபபபடடுள்ளது. குழாயிற காலி வடிவத்தில ஒரு கூன் உணடெனின், கூனுககு அணமையில் $pr/2t$ எனனும் பருமன்கொணட நெட்டாங்கு இழுவைத் தகைப்பு குழாயில உண்டெனக காட்டுக ; இஙகு t ஆனது குழாயின் தடிபபைக் குறிக்கும். (குழாயில் கூனுக்கு அண்மையில் இடையான வெளி விசை யாதும தாக்காதென உத்தேசிக்கப்பட வேண்டும்).

கூன 90° இலும் பெரிதாகவோ சிறிதாகவோ இருபபின இழுவை பாதிககப்படுமா ? (Inter. Eng.)

7. h அடி உயரமும் d அங்குல விட்டமுள்ள துவாரமும கொண்ட ஒரு **நிலைக்குத்துக்** குழாய் நீரைக கொணடுளளது. குழாயின் தடிபபு t அஙகுலமும் நீரின் அடர்ததி கன அடிக்கு w இருத்தலுமாயின வளையத தகைபபு எங்கு உயாவாகும் ; இவவுயர்வுப் பெறுமானம என்ன ?

8. 16 அங்குல ஆரையுளள ஒரு கோள வாயுக கூணடு, சதுர அங்குலத்திற்கு 20 இருத்தல அமுககத்தில வாயுவால நிரபபபபட்டுப் புவியிலிருநது எழும். உறை $\frac{1}{10}$ அங்குலத தடிபபாகிச் சதுர அஙகுலததிற்கு 800 இருததலுள்ள தகைபபைச் சறறே தாங்குமாயின, கூணடு உடையும் உயரததைக் காண்க. புவிபபரப்பில வளிமண்டல அமுக்கம் சதுர அஙகுலத்திறகு 14·77 இரு. நிறையெனவும், அது புவிப்பரப்பின் மேல யாதும் உயரததில் § 78 இற பெறற கோவையோடு இணங்குமெனவும் உததேசிகக.

விடை

1. $\frac{4P}{\pi d^2}$ தொன நிறை, சதுர அங்குலத்திற்கு.

2. 300 இரு. நிறை/சதுர அங.

3. 10,080 இரு. நிறை/சதுர அங.

4. 8845·2 இரு. நிறை/சதுர அங்.

5. 9 : 14.

6. இலலை.

7. அடியில ; $\frac{dhw}{2t}$ இரு. நிறை/சதுர அடி.

8. 10,278 அடி.

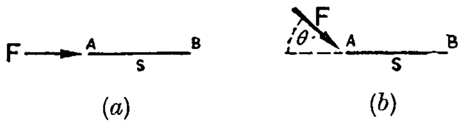
அதிகாரம் XIII

நீர்நிலையியற் செய்கையியற் செய்யப்படும் வேலை

91. வேலை

ஒரு விசை ஓர் உடலிற் பிரயோகிக்கப்பட்டுப் பிரயோகப் புள்ளி அசையும் போது விசை வேலை செய்யுமெனப்படும். செய்யப்படும வேலை விசையினதும் **விசையின் திசையில்** பிரயோகபபுள்ளி அசையுந தூரத்தினதும் பெருக்கத் தால் அளக்கப்படும்.

ஆயின், F இரு. நிறையு டைய ஒரு விசை தனது பிர யோகப் புள்ளியை விசையி னுடைய திசையில் s அடி தூரத்திற்கு அரக்குமாயின் செய்யபபடும் வேலை $=\mathrm{F}s$ அடி - இரு. நிறை [படம் 145 (a)].



படம் 145

படம் 145 (b) யில் உள்ளது போல், பிரயோகப புள்ளி இயங்க விகாரபபட் டிருககுந் திசையோடு(AB) θ என்னுங் கோணத்தில் விசை தாக்கு மாயின், AB என்னுந் திசையில் விசையின துணிதத பகுதி எமக்கு வேண்டும். இது F கோசை θ ஆதலால A யிலிருந்து B யிற்குப் பிரயோகப் புள்ளியை அரக்குதற்குச் செய்யப்படும் வேலை $\mathrm{F}s$ கோசை θ அடி—இரு. நிறையாகும். AB யிற்குச் செஙகுத்தாக இவ்விசையின் துணித்த பகுதிக்கு (அதாவது F சைன் θ) இத்திசையில் யாதும் இடப் பெயர்ச்சி இல்லாததால் யாதும் வேலை செய்யாது.

இனி விசையானது, A, B என்பனவற்றிற்கிடையே செப்பமான நிலையைச் சார்ந்து மாறுமென உத்தேசிக்க. δs என்னும் ஒரு சிறு தூர மூலகத்தை எடுத்து நோக்குக. இச்சிறு இடப்பெயர்ச்சி முழுவதிலும், இடப்பெயர்ச்சியின் திசையில் விசையானது F என்னும் ஒரு மாறாப் பெறுமானத்தைக் கொள்ளும் என உத்தேசிக்க. பிரயோகப் புள்ளியை δs என்னும் இத தூரததிற்கூடாக அசைத்தற்குச் செய்யபபடும் வேலை $\mathrm{F}.\delta s$ ஆதலால், A யிலிருந்து B யிறகுச் செய்யப்படும் மொதத வேலை

$$\int \mathrm{F}ds$$

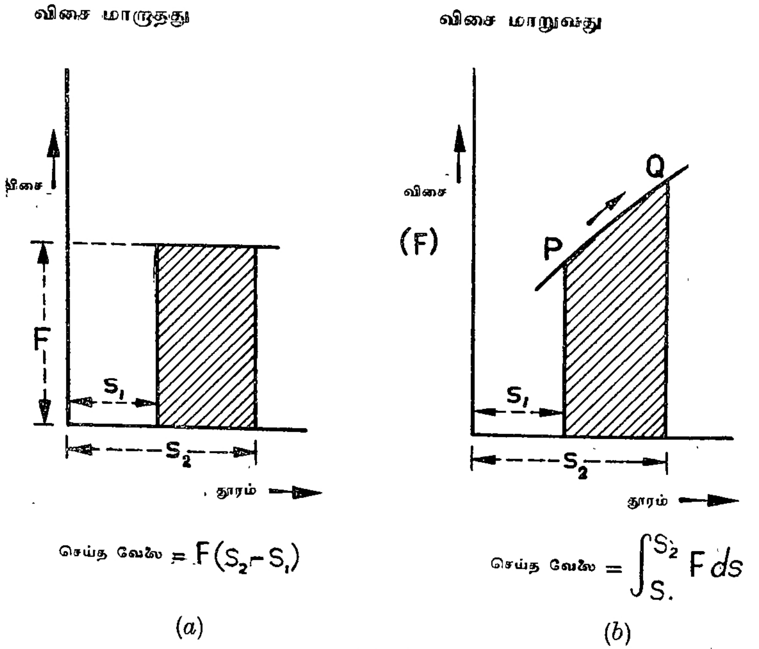
ஆகும், இங்கு தொகையீடானது A, B என்பனவற்றிற்கு ஒத்த எல்லை களுக்கிடையிற் பெறுமானங் கணிக்கபபடும். உதாரணமாக, AB என்னுந் திசையிலுள்ள யாதும் ஓர் உற்பத்திபற்றி A யானது $s = s_1$, என்னும் புள்ளியும் B யானது $s=s_2$ எனனும் புளளியுமாயின் (அதாவது $\mathrm{AB}=s_2-s_1$)

$$\text{செய்யப்படும் வேலை} = \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{F}ds\ ;$$

F ஆனது s இன் ஒரு சார்பாய்த் தெரிந்தாலன்றி இத் தொகையீட்டின் பெறுமானங் கணித்தல் இயலாது. (அதாவது தூரத்தோடு விசைமாறும் வடிவம் தெரியவேண்டும்).

இவ்வதிகாரத்தில், திரவத்தை ஒரு மட்டத்திலிருந்து வேறொரு மட்டத்திற்கு இடமாற்றஞ் செய்தல்போன்ற நீர்நிலையியற் செய்கைகளிற் செய்யப்படும் வேலை ; திரவத்தின் தொடர்பாக ஒரு மிதக்கும உடலின் நிலையை மாற்றுதலாற் செயயப்படும் வேலை ; வாயுக்கள் விரிதலாற செய்யப்படும் வேலை ; ஆகியவற்றில் மாத்திரம் கவனம செலுத்துவோம்.

விசை—வெளி வரிப்படம் அல்லது **வேலை வரிப்படம்** என்பதை வரைதலால், முககியமாக மாறும் விசைகளின் வகையில, கூடிய உதவியைப் பெறலாம். அது தூரத்திற்கு எதிராய் விசையைக குறித்தலேயாகும். மேலுள்ள தொடர்பிலிருந்து, செய்யப்படும் வேலையானது அவ்வாறு பெறற வளையியின் கீழ் உள்ள பரப்பளவாற குறிக்கப்படும்.

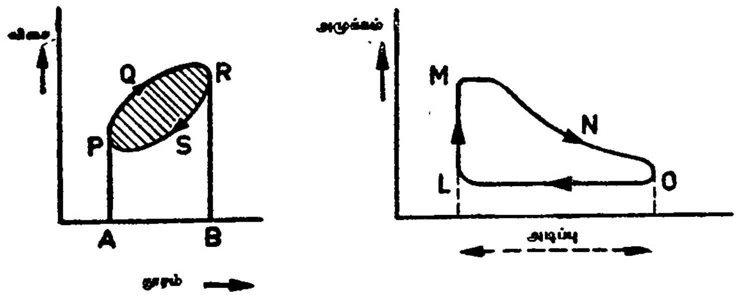


படம் 146

படம 146 (a) யை எடுத்து நோக்குக. இஙகு (கிடையாகக் குறிக்கப்படும்) அரக்கிய தூரத்திறகு எதிராய் நிலைக்குத்தாய்க குறிக்கப்படும் ஒரு மாறுவிசை F ஐப் பெறுகின்றேம். அரக்கிய தூரம் s_1 இலிருந்து s_2 இற்கு உள்ளதாதலால் கோடிட்ட பரப்பளவு, அதாவது $F(s_2-s_1)$ செய்

யப்படும் வேலையைக் குறிக்கும். படம் 146 (b) யில் ஒரு மாறும் விசை யைப் பெறுவோம். இங்கு கோடிட்ட பரப்பளவாகிய $\int^{s_2} F ds$ என்பது செய் யப்படும் வேலைக்குச் சமனாகும்.

உதாரணங்களைத் தீர்த்தற்கு முன்னர் எந்திரிகளுக்கு மிகமுக்கியமாய்ப் பயன்படும் விசை–வெளி வரிப்படத்தின் பிரயோகமொன்றைக் கவனித்தல் பயன்தரும். படம் 146 (b) யில் வளையியானது P யிலிருந்து Q விற்கு வரையப்படும், அதாவது s ஆனது அதிகரிக்கும், என உத்தேசித்துள் ளோம் என்பதை முதலில் கவனிக்க. அது மற்றைத் திசையில் வரை யப்படுமாயின், அதாவது s ஆனது குறையுமாயின், கோடிட்ட பரப்பளவு F என்னும் விசைக்கு எதிராக (வேறு விசைகளால்) செய்யப்படும் வேலை யைத் தரும்; F என்னும் விசையைப் பொறுத்தவரை இது மறை வேலையாகும்.



(a) (b)

படம் 147.

தனது பிரயோகப் புள்ளியை A யிலிருந்து B யிற்கு [படம் 147 (a)] PQR எனனும் பாதையில் அரக்கச் செய்யும் ஒரு மாறும விசை உண் டென உத்தேசிக்க. ஆயின் PQRBA என்னும் பரப்பளவு, விசையாற் செய்யப்படும் நேர் வேலையை அல்லது பயன்படு வேலையைக் குறிககும். பிர யோகப் புள்ளி B யை அடைந்த பின்னர், (வேறு விசைகளால்) RSP என்னும் பாதையால் A யிற்குப் பின் செலுத்தப்படுமாயின், இப்பாதை யானது மாறும் விசைக்கு எதிராக வேலை செய்யப்படுதலால் இவ்விசையின் பருமனை வரையும். இம்மறை வேலை BRSPA என்னும் பரப்பளவாற் குறிக்கப்படுதலால் பிரயோகப் புள்ளி A யிலிருந்து B யிற்கும், மறுபடி B யிலிருந்து A யிற்கும் இயங்குமிடத்து, மாறும் விசையாற் செய்யப் படும் மொத்த நேர் வேலை அல்லது பயன்படு வேலை PQRBA, BRSPA என்னும் பரப்பளவுகளின் வித்தியாசத்தாற குறிக்கப்படும்.

அதாவது, செய்யப்படும் பயன்படு வேலை = PQRS என்னுங் கோடிட்ட பரப்பளவு.

முசலத்திலே தாக்கும் பாயி அமுக்கத்தால் இயக்கப்படும் ஒரு பொறி செய்யும் வேலையைத் துணிதற்கு இக்கொள்கை வழங்கப்படும். உதாரணமாக, ஒரு கொதிநீராவி எஞ்சினில் கொதிநீராவி அமுக்கம் முசலத்தை வெளியே தள்ளிப் பொறியை இயக்குதலால் முன்முக அடிப்புப் பெறப்படும். பின்னர் மிகப் பெரிய பங்கு கொதி நீராவி தப்ப, பொறியின் உந்தத்தால் குறைந்த கொதிநீராவி அமுக்கத்திற்கு எதிராகத் தன் தொடக்க நிலைக்கு முசலம் செலுத்தப்படும். கொதி நீராவி கூடுதலாக உட்செல்ல இச்செய்கை மறிதரப்படும். காட்டி எனப்படும் ஒரு கருவி பொறிக்குத் தொடுக்கப்பட்டுப் பொறிக்குரிய வேலை வரிப்படத்தைத் தன்னியக்கமாக வரையும். அது **காட்டி வரிப்படம்** எனப்பட்டுப் பெரும்பாலும் படம் 147 (*b*) யிற் காட்டப்பட்ட வடிவத்தை உடையதாகும். கொதிநீராவி உருளைக்குட் செலுத்தப்படுகையில் ஏற்படும் அமுக்க அதிகரிப்பை LM குறிக்கும். MNO ஆனது முசலத்தின் அடிப்பு முழுவதும் அது முன்முகமாய்ச் செலுத்தப்படும்போது கொதிநீராவி அமுக்கத்தில் ஏற்படும் வீழ்ச்சியைக் காட்ட, OL ஆனது முசலம் தனது தொடக்க நிலைக்குச் செலுத்தப்படுதலை எதிர்க்கும் கொதிரநீராவி அமுக்கத்தைக் காட்டும். இவ்வரிபபடஙகள் எந்திரிக்கு முக்கியமாகும்; ஏனெனின் இவை ஒரு குறிப்பிட்ட எஞ்சினுற் செய்யப்படும் மொத்த வேலையையும், முசலமானது உருளைக்குள் குறுக்குமறுக்காய்ச் செல்லுகையில் புள்ளிக்குப் புள்ளி அமுக்க மாறலையும் தரும்.

செய்யப்படும் வேலையைக் குறித்து எந்திரி அடி இருததல நிறை அலகுகளை வழங்கிய போதிலும் நாம் அதே மாதிரி தனி அலகாகிய அடி இருத்தலியை வழங்கலாம் என்பது கவனிக்கப்பட வேண்டும்.

சில உதாரணஙகளை இனித் தருவோம்.

உதாரணம் 1. சதுர அங்குலத்திற்கு 60 இரு. நிறையுடைய அமுக்கத்தில் வாயுவைக் கொண்ட ஒரு பெரிய போத்தல் ,$1\frac{1}{2}$ அங்குல நீளமும் $1\frac{1}{4}$ சதுர அங்குலக் குறுக்கு வெட்டுமுள்ள உருளைக் கிடேச்சால் அடைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடேச்சின் $\frac{1}{2}$ அங்குலம் போத்தல் வாய்க்கு வெளியில் உள்ளது.வளிமண்டல் அமுக்கம் 14·7 இரு. நிறை/சதுர அங். ஆயின், கிடேச்சு போத்தலிலிருந்து வெளித் தள்ளப்படும் போது வாயுவாற் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.

போத்தலுக்குள் உள்ள கிடேச்சின் முனையில் அமுக்கம் 60 இரு. நிறை/சதுர அங். ஆகவும், புறத்தில் வளிமண்டல அமுக்கமுமாகும். ஆகவே கிடேச்சில் விளையுள் அமுக்கம்.

$$= 60 - 14{\cdot}7 \text{ இரு. நிறை/சதுர அங்., வெளிமுகமாக.}$$

$$= 45{\cdot}3 \text{ இரு. நிறை/சதுர அங்.}$$

ஆகவே கிடேச்சில் விளையுள் விசை $= 45{\cdot}3 \times 1\frac{1}{4}$ இரு. நிறை.

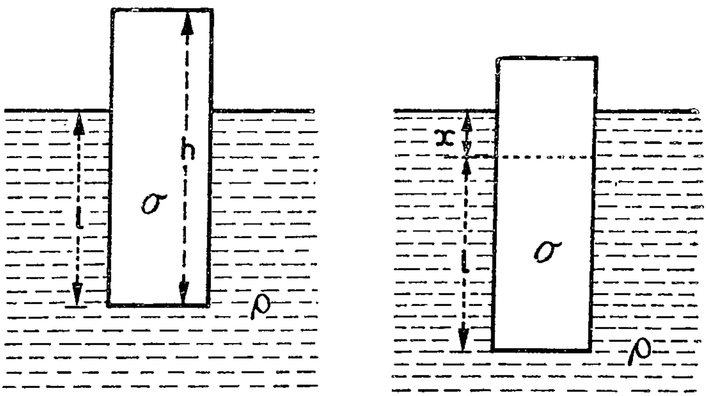
கிடேச்சு வெளிவரும்போது கனவளவில் உண்டாகும் சிறு மாற்றம் புறக்கணிக்கப்படுமாறு போத்தல் பெரிதாயிருக்குமெனக் கொள்வோமாயின் இவ்விசை ஒரு மாறிலியாகும்; அது தாக்குந் தூரம் போத்தலுக்குள் உள்ள கிடேச்சின் நீளமாகும், அதாவது 1 அங்குலம்.

ஆகவே செய்யப்பட்ட வேலை $=45\cdot3\times1\frac{1}{4}\times1$ அங்.–இரு. நிறை

$=45\cdot3\times1\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}$ அடி–இரு. நிறை

$=4\cdot72$ அடி–இரு. நிறை.

உதாரணம் 2. h அடி உயரமும், a சதுர அடி குறுக்குவெட்டும், கன அடிக்கு σ இரு. அடர்த்தியுமுள்ள ஓர் உருளைத்துண்டு; கன அடிக்கு ρ இரு. அடர்த்தியுள்ள ஒரு பெரும் பரப்புடைய திரவத்தில் தன்னச்சு நிலைக்குத்தாக மிதக்கும். அது திரவத்தில் மட்டாய் உள்ளாழ்த்தப்படுமாறு அதன் மேன்முனையைத் தாழ்த்தற்குச் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.



(a) (b)

படம் 148

உருளை சமநிலையில் மிதக்கும்போது l அடி நீளம் உளளாழ்த்தப்படு மென உததேசிக்க [படம் 148 (a)].

ஆயின் கேள்வியிற் கொடுத்த தகவிலிருந்து,

உருளையின் நிறை $= ha\sigma$ இரு. நிறை.

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை $= la\rho$ இரு. நிறை.

ஆகவே ஆக்கிமிடீசின் கோட்பாட்டிலிருந்து,

$$ha\sigma = la\rho,$$

அ—து.

$$h\sigma = l\rho,$$

அல்லது

$$l = \frac{h\sigma}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

இனி, உருளை x அடி தூரம் தாழ்த்தப்படுமென உத்தேசிக்க [படம் 148 (*b*)]. கேள்வியில் உள்ள "ஒரு பெரும் பரப்புடைய திரவம்" என்னுஞ் சொற்கள் கூடுதலான உள்ளாழ்த்தலால் பரப்பு மட்டத்தில் ஏற்படும் உயர்வை நாம் எடுத்து நோக்க வேண்டியதில்லை என்பதையே குறிக்கும். இந்நிலையில் உருளையிலுள்ள விளையுள் மேலுதைப்பைத் துணிவோம்.

இப்போது உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ள உருளையின் நீளம் $l+x$ அடி,

ஆதலால்,

இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறை $=(l+x)\,a\rho$ இரு. நிறை.

உருளையின் நிறை $=ha\sigma$ இரு. நிறை.

ஆகவே, விளையுள் மேலுதைப்பு $=(l+x)\,a\rho-ha\sigma$ இரு. நிறை.

$=xa\rho$; $l\rho=h\sigma$ ஆதலால் ....(i)

இந்நிலையிலிருந்து δx அடி கூடுதலாக இடம்பெயர்ப்பதாற் செய்யப் படும் வேலை $=xa\rho.\delta x$ அடி இரு. நிறை.

உருளை மட்டாய் உள்ளாழ்த்தப்படவேண்டுமாயின், x ஆனது (சமநிலைத தானத்தில்) பூச்சியத்திலிருந்து (மட்டாய் உள்ளாழ்ததப்படும்போது) $h-l$ என்பதுவரை வீச்சமுறும்.

ஆகவே செய்யப்படும் மொத்த வேலை $=\int_0^{h-l} xa\rho.dx$ அடி இரு. நிறை

$$=a\rho\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{h-l}$$

$$=\tfrac{1}{2}a\rho\,(h-l)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

$$=\tfrac{1}{2}a\rho\left(h-\frac{h\sigma}{\rho}\right)^2, \quad \text{(i) இலிருந்து}$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{ah^2}{\rho}(\rho-\sigma)^2 \quad \text{அடி. இரு. நிறை.}$$

அறிவூட்டுவதும் தொகையிடலை விலக்குவதுமான வேறொரு முறையாக வேலை வரிப்படத்தை நாம் உபயோகிக்கலாம்.

சமன்பாடு (ii) இலிருந்து, கூடுதலான உள்ளாழ்த்தல் x அடி ஆகு மிடத்து வெல்ல வேண்டிய மேலுதைப்பு $xa\rho$ இரு. நிறை என்பது எமக்குத் தெரியும். இது விசை மாறும் ஒரு வகையாகி, வேலை வரிப்படம் $F=xa\rho$ என்னுங் கோட்டை வரைதலாற் பெறப்படும் ; இங்கு F ஆனது விளையுள் மேலுதைப்பு (படம் 149).

இது $y=mx$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள ஒரு நேர் கோடாதலால், செயயப்படும் வேலை OAB என்னும் முக்கோணியின் பரப்பளவாகும் ;

இங்கு $OA = h-l$. x தூரத்தில் நிலைக்கூறின் உயரம் $xa\rho$ ஆதலால், AB என்னும் நீளம் $(h-l)a\rho$ என்பதற்குச் சமனாகும்; ஆகவே,
செய்யப்பட்ட மொத்த வேலை $=$ OAB என்னும் முக்கோணியின் பரப்பளவு

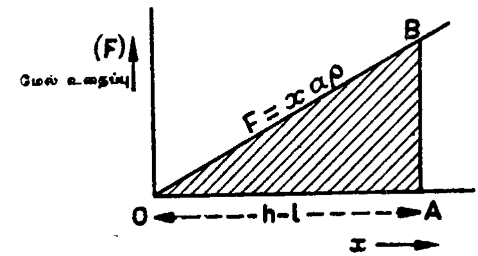
$$= \tfrac{1}{2}\, OA.AB$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(h-l).(h-l)\, a\rho$$
$$= \tfrac{1}{2}\, a\rho(h-l)^2,$$

இது, சமன்பாடு (iii) பெற்றது போன்றதே.

$$\text{முன்போல} \quad = \tfrac{1}{2}\,\frac{ah^2}{\rho}(\rho-\sigma)^2 \quad \text{அடி இரு. நிறை.}$$

92. வேலையும் அழுத்தச் சக்தியும்

ஒருடலின் அழுத்தச் சக்தியானது அதன் நிலையின் காரணமாக அவ்வுடல் செய்யத்தக்க வேலையின் அளவாகும். உதாரணமாக, 2 இருத்தல் திணிவு நிலத்தின் மேல் 7 அடி உயரத்திற்கு பிடிக்கப்படுமாயின் அது நிலத்தைக் குறித்து 14 அடி – இரு. நிறையையுடைய அழுத்தச் சக்தியைக் கொண்டிருக்கும். அதாவது அது நிலத்தில் விழுமிடத்து 14 அடி – இரு. நிறையையுடைய வேலையைச் செய்யும்.



படம் 149

ஆயின் நீர்நிலையியற் செய்கைகளில் ஒருடலில் புவியீர்ப்புக்கு எதிராகவேலை செய்யப்படுமாயின் உடலின் அழுத்தச் சக்தியில் ஒத்த அதிகரிப்பு உண்டாகும். புவியீர்ப்பு ஒருடலில் வேலைசெய்யுமாயின் அழுத்தச் சக்தியில் ஒத்த குறைவு உண்டாகும். ஆகவே ஒரு குறித்த செய்கையிற் செய்யப்படும் வேலைபற்றிய பிரச்சினைகளை அச்செய்கையாற் பாதிக்கப்பட்ட உடல்களின் அழுத்தச் சக்தியில் நிகழும் மாற்றங்களை எடுத்து நோக்கிப் பல முறையும் நாம் அவற்றைத் தீர்ககலாம். ஒரு திரவவுடலுக்கு அழுத்தச் சக்தியுண்டு; அதன் உருவவமைப்பு மாற்றப்படுமாயின் அதன் அழுத்தச் சக்தி மாற்றம் அதன் நிறையினதும் அதன் ஈர்ப்பு மையம் இயங்கும் நிலைக்குத்துத் தூரத்தினதும் பெருக்கத்தால் அளக்கப்படும். இது கீழேயுள்ள உதாரணம் 1 இல் விளக்கிக் காட்டப்படும்.

உதாரணம் 1. a சதுர அடி குறுக்குவெட்டு உள்ள ஓர் உருளை வடிவான கிணற்றின் அடி நிலமட்டத்தின் கீழ் h அடி ஆகிய கிணற்றிலுள்ள நீரின் உயரம் d அடி ஆகும். நீர் முழுவதையும் நிலமட்டத்திற்குப் பம்பிக்கையில் செய்யப்படும் வேலையையும், அழுத்தச் சக்தியில் ஒத்த மாற்றத்தையுங் காண்க.

நிலமட்டத்தின் கீழ் x, $x+\delta x$ என்னும் ஆளங்களிலுள்ள கிடைத் தளங்களுக்கு இடையே கொள்ளப்படும் நீரை எடுத்து நோக்குக (படம் 150).

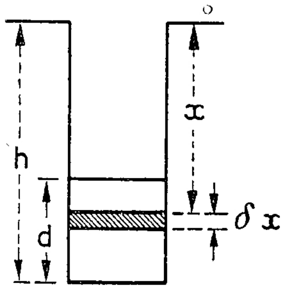
இம்மூலகத்தின் கனவளவு $=a\delta x$ கன அடி;

இம்மூலகத்தின் நிறை $=wa\delta x$ இரு. நிறை;

இங்கு w ஆனது ஒரு கன அடி நீரின் நிறையாகும்.

ஆகவே இந்நிறையுடைய நீரை நிலமட்டத்திற்கு ஏற்றுதறகுச் செய்யப்படும் வேலை $=x.wa\delta x$ அடி-இரு. நிறை;

$\therefore$ எல்லா நீரையும் நிலமட்டத்திறகு ஏற்றுதற்குச் செய்யப்படும மொத்த வேலை $=\int waxdx$;



படம் 150

இஙகு x ஆனது $h-d$ யிலிருந்து hவரை இருககும். அதாவது செய்யப்படும் மொத்த வேலை

$$=\int_{h-d}^{h} waxdx$$

$$=wa\left[\frac{x^2}{2}\right]_{h-d}^{h}$$

$$=\tfrac{1}{2}wa\ [h^2-(h-d)^2]$$

$$=\tfrac{1}{2}wa\ (2hd-d^2)$$

$$=awd\left(h-\frac{d}{2}\right) \text{ அடி-இரு. நிறை.}$$

ஆனல் $awd=$ நீரின் மொத்த நிறை, $h-\dfrac{d}{2}=$ நிலமட்டத்தின் கீழ் நீரினுடைய புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம்.

ஆகவே கிணற்றின் அடியைக் குறித்து நீரானது $awd\left(h-\dfrac{d}{2}\right)$ அடி-இரு. நிறையுடைய அழுத்தச் சக்தியைப் பெற்றுள்ளது.

உதாரணம் 2. 4 அடி ஓரத்தையுடைய சதுரமுகி வடிவமான ஒரு குளிர் நீர்த் தாங்கியில் நீர் நிரம்பியுள்ளது. அதே கனவளவு உள்ளுறையும் 6 அடி உயரமும் உள்ள ஓர் உருளை வடிவான வெப்ப நீர்த்தாங்கியோடு இது தொடுக்கப்படும். இவ்வெப்ப நீர்த் தாங்கியின் அச்சு நிலைக்குத்தாகி இதன் மேன்முனை குளிர் நீர்த்தாங்கியின் அடிக்குப் 10 அடி கீழே இருக்கும். நீர் மேற்றுங்கியிலிருந்து கீழ்த்தாங்கிக்குப் பாயுமாயின் அழுத்தச் சக்தியில் ஏற்படும் நட்டத்தைக் காண்க.

மேற்றுங்கியிலுள்ள நீரின் கனவளவு $=4\times4\times4$ கன அடி.

$\therefore$ மேற்றுங்கியிலுள்ள நீரின் நிறை $=4\times4\times4\times62\tfrac{1}{2}$ இரு. நிறை.

$=4000$ இரு. நிறை.

மேற்றுங்கியின் புவியீர்ப்பு மையம் கீழ்த்தாங்கியின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் மேல் $2+10+3$ அடி உயரத்திலிருக்கும்.

$\therefore$ அழுத்தச் சக்தி நட்டம் $=4000\times15$ அடி-இரு. நிறை
$=60,000$ அடி-இரு. நிறை.

உதாரணம் 3. §91, உதாரணம் 2 ஐ தொகுதியின் அழுத்தச் சக்தி மாற்றத்தை எடுத்து நோக்கித் தீர்க்க.

படம் 148 ஐப் பார்க்க.

உருளைத் துண்டு தாழ்த்தப்படும்போது அது அழுத்தச் சக்தியை இழக்கும். ஆனால் அது தாழ்த்தப்படும்போது இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவம் பரப்புக்கு எழுதலால் இத்திரவத்தால் அழுத்தச் சக்தியில் ஓர் நயமுண்டாகும்.

இறுதி நிலையில் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கூடுதலான திரவக் கனவளவு $(h-l)a$ கன அடி ; அதன் நிறை $(h-l)a\rho$ இரு. நிறையாகும்.

தொடக்கத்தில் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் பரப்பின் கீழ் $l+\dfrac{h-l}{2}$ ஆழத்திலிருக்கும்.

ஆகவே திரவம் பெறற அழுத்தச் சக்தி

$$=(h-l)\,a\rho\left(l+\frac{h-l}{2}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\,a\rho\,(h-l)\,(h+l) \text{ அடி-இரு. நிறை}$$

$$=\tfrac{1}{2}\,a\rho\,(h^2-l^2) \text{ அடி-இரு. நிறை} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}.$$

உருளையின் நிறை $=ha\sigma$ இரு. நிறை ;
அதன் புவியீர்ப்பு மையம் கீழ்முகமாக இயங்குந் தூரம $=h-l$ அடி ;
$\therefore$ உருளை இழந்த அழுததச் சக்தி

$$=ha\sigma\,(h-l) \text{ அடி-இரு. நிறை}$$

$$=la\rho\,(h-l) \text{ அடி-இரு. நிறை} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)},$$

$ha\sigma=la\rho$ ஆதலால்.

$\therefore$ தொகுதி பெறற மொத்த அழுத்தச் சக்தி

$$=\text{(i)}-\text{(ii)}$$

$$=\tfrac{1}{2}\,a\rho\,(h^2-l^2)-la\rho\,(h-l)$$

$$=\tfrac{1}{2}\,a\rho\,(h-l)\,(h+l-2l)$$

$$=\tfrac{1}{2}\,a\rho\,(h-l)^2 \text{ அடி-இரு. நிறை ;}$$

இது §91, உதாரணம் 2 இற் பெற்ற அதே கோவையாகி $\tfrac{1}{2}\,\dfrac{ah^2}{\rho}\,(\rho-\sigma)^2$ அடி-இரு. நிறைக்குச் சமனாகும்.

இது தொகுதி பெற்ற மொத்த அழுத்தச் சக்தியாதலால் உருளையை வேண்டிய நிலைக்குத் தாழ்த்தும்போது செய்யப்படும் வேலைக்குச் சமனாகும்.

உதாரணம் 4. W நிறையும் a ஆரையுமுள்ள ஒரு கோளம் ஒரு பெரிய நீர்ப்பாண்டத்தில் அரைப்பாகம் உள்ளாழ்த்தப்பட்டு மிதக்கும். அதனை நீரிலிருந்து மட்டாய் வெளியே உயர்த்துதற்கு வேண்டிய வேலையைக் காண்க.

கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் நிலைக்குத்தாய் மேனை நோக்கி a தூரம் உயர்த்தப்படுதலால் அதன் அழுத்தச் சக்தி கூடும். ஆனால் கோளம் உயர்த்தப்படும்போது விடப்பட்ட அரைக்கோள வெளியை நிரப்புதற்கு நீரானது கீழ்ப்பாய வேண்டியதால் அது அழுத்தச் சக்தியை இழக்கும்.

$$\text{கோளம் பெற்ற அழுத்தச் சக்தி} = Wa.$$

கோளம் மிதக்கும்போது இடப்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை W ஆதலால, இதுவே பரப்பிலிருந்து தாழ்த்தப்பட வேண்டிய நீரின் நிறையாகும். அரைக்கோளத்தின புவியீர்ப்பு மையம் மையத்திலிருந்து $\frac{3}{8}a$ தூரத்திலிருத்தலால்,

$$\text{நீர் இழந்த அழுத்தச் சக்தி} = W.\ \tfrac{3}{8}a.$$

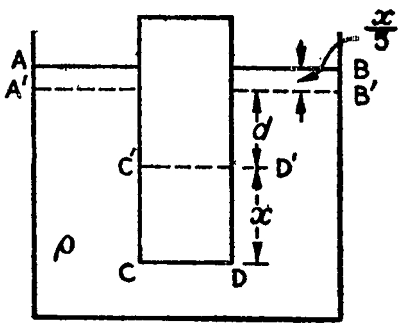
ஆகவே தொகுதி பெறற மொத்த அழுததச் சக்தி

$$= Wa - \tfrac{3}{8}Wa$$

$$= \tfrac{5}{8}Wa,$$

இதுவே கோளத்தை நீரிலிருந்து மட்டாய் வெளியே உயர்த்துதறகு வேண்டிய வேலையாகும்.

உதாரணம் 5. $6a$ குறுக்குவெட்டுள்ள உருளைப் பாண்டத்திற் கொள்ளப்படும் நீரில் a என்னுங் குறுக்கு வெட்டுள்ள ஓர் உருளை தன்னச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு மிதக்கும். நீரின் அடர்த்தி ρ ஆயின் உருளை (முற்றும் நீருக்கு வெளியாகாது) x என்னும் உயரத்திற்கு உயர்த்தப்படும் போது தொகுதியிலுள்ள அழுத்தச் சக்தி அதிகரிப்பு $\frac{3}{5}a\rho x^2$ எனக் காட்டுக.



படம் 151

முறை (i) செய்யப்படும் வேலையை நேரடியாகக் காண்பதால்.

படம் 151 ஐப பார்க்க. AB நீரின் தொடக்க மட்டததைக் குறிக்க, CD உருளையின அடியைக் குறிககும். உருளையின அடி C′D′ எனபதிலிருககுமாறு உருளை x தூரம உயர்த்தப்படும்போது நீரின மட்டம் A′B′ இறகு விழும். ஆகவே, உள்ளாழ்த்தபபட்டுளள நீளம் A′B′, C′D′ என்பனவறறின உயர வித்தியாசமாகும். இத்தூரம் d ஆகுக.

உருளை x தூரம் உயர்த்தபபடும்போது அது CD, C′D′ என்பனவற்றிறகிடையே இடங்கொணட வெளியை நிரப்பும் நீரின் கனவளவு ax

ஆகும ; இக் கனவளவு, நீர்மட்டத்தை A யிலிருந்து A′ இற்கு தாழ்த்த லாற் பெறப்படும்.

$$\text{நீர்ப்பரப்பின பரப்பளவு} = 6a - a$$
$$= 5a.$$

$\therefore$ AB, A′B′ என்பனவற்றிற்கிடையே உள்ள நீரின் கனவளவு $= 5a \times AA'$;

$$\therefore \quad 5a \times AA' = ax \; ;$$
$$\therefore \quad AA' = \tfrac{1}{5}x.$$

உருளையின் நிறை W ஆகுக.

ஆக்கிமிடீசின் கோட்பாட்டால இது சமநிலையில் இடமபெயாக்கப்பட்ட நீரின் நிறையாகும,

அதாவது $$W = a\rho\left(x + d + \frac{x}{5}\right) \dots\dots\dots\dots (1).$$

உருளை x தூரம் உயர்த்தப்பட்ட பின்னர் உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ள நீளம d ஆகும் ;

$\therefore$ இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின நிறை $= ad\rho$; இதுவே மேலுதைப்பாகும்.

ஆகவே,

$$\begin{aligned} \text{கீழ்முக விளையுள் விசை} &= \text{உருளையின நிறை - மேலுதைப்பு} \\ &= W - ad\rho \\ &= a\rho\left(\frac{6x}{5} + d\right) - ad\rho, \text{ (i) இலிருந்து} \\ &= \frac{6xa\rho}{5} \dots\dots\dots\dots (ii). \end{aligned}$$

இது x என்னும் இடப்பெயாச்சிக்கு ஒத்த விளையுள் விசையாகும். CD, C′D′ எனபனவற்றிற்கிடையே உள்ள ஒரு நிலையின் இடப்பெயர்ச்சி z ஆயின், இவ்விடப்பெயர்ச்சிககு ஒத்த விளையுள் விசை $= \dfrac{6za\rho}{5}$.

இவ்விடப்பெயர்ச்சியை δz என்பதால அதிகரிக்கச் செய்தலாற செய்யப் படும் வேலை

$$\frac{6za\rho}{5} . \delta z \text{ ஆகும் ;}$$

$\therefore$ x இடப்பெயர்ச்சியில் செய்யப்படும் மொத்த வேலை

$$\begin{aligned} &= \int_0^x \frac{6za\rho}{5}\, dz \\ &= \frac{6a\rho}{5}\int_0^x z dz \\ &= \frac{6a\rho}{5}\,\frac{x^2}{2} \\ &= \frac{3}{5}\, a\rho\, x^2, \end{aligned}$$

இது தொகுதியின் அழுத்தச் சக்தி அதிகரிப்புக்குச் சமனாகும்.

முறை (ii) அழுத்தச் சக்தி மாறறத்தை எடுத்து நோக்குவதால்.

முன்னுள்ள அதே குறிப்பீட்டை வழங்கி x என்னும் இறுதி இடப் பெயர்ச்சிக்குரிய அழுதததச் சக்தி மாற்றத்தை எடுத்து நோக்கும்போது

$$\text{உருளை பெறற அழுத்தச் சக்தி} = Wx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}.$$

தாழ்த்தப்பட்ட நீரின் நிறை $ax\rho$ ஆகி, தொடக்கத்தில் B, B′ என்பன வற்றிற்கிடையே நடுவிலுள்ள அதன் புவியீர்ப்பு மையம் D′, D என்பனவற் றிறகு இடையில் நடுவிலிருக்குமாறு தாழ்த்தப்படும்,

அதாவது $\frac{x}{10}+d+\frac{x}{2}$ எனனுந் தூரத்திறகுத் தாழ்த்தப்படும் ;

$$\therefore \text{ நீர் இழந்த அழுத்தச் சகதி } = ax\rho\left(\frac{x}{10}+d+\frac{x}{2}\right)$$

$$= ax\rho\left(\frac{3x}{5}+d\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iv)}.$$

தொகுதி பெற்ற மொத்த அழுத்தச் சக்தி

$$= \text{(iii)} - \text{(iv)}$$

$$= Wx - ax\rho\left(\frac{3x}{5}+d\right)$$

$$= a\rho x\left(x+d+\frac{x}{5}\right) - ax\rho\left(\frac{3x}{5}+d\right), \text{ (i) இலிருந்து}$$

$$= a\rho x\left(\frac{6x}{5}+d-\frac{3x}{5}-d\right)$$

$$= \frac{3}{5}\,a\rho x^2, \text{ முன்போல.}$$

முறை (iii) வேலைவரிப்படத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதால்.

முறை (i) இல் முசலம் x தூரம் உயர்த்தப்படுமிடத்து கீழ்முக விளையுள் விசை துணியப்பட்டுள்ளது ; அதாவது [சமன்பாடு (ii)]

$$\text{கீழ்முக விளையுள் விசை} = \frac{6xa\rho}{5}.$$

x இற்கு ஒத்ததாய் விசையைக் குறிக்க ஒரு நேர்கோடு பெறப்படுதலால், வேலைவரிப்படம் படம் 149 இலுள்ளதுபோல் ஒரு முக்கோணியாகும். அவ்வுருவத்தில் OA யானது இப்போது x ஆகி AB யானது $\frac{6xa\rho}{5}$ ஆகும். ஆதலால்

$$\text{வேலைவரிப்படத்தின பரப்பளவு} = \tfrac{1}{2}\text{OA.AB}$$

$$= \frac{1}{2}x \cdot \frac{6xa\rho}{5}$$

$$= \tfrac{3}{5}a\rho x^2 ;$$

இது அழுத்தச் சக்தி அதிகரிப்புக்குச் சமனகும்.

93. வாயுக்களின் விரிவு

அதிகாரம் X, § 75 இல், ஒரு தந்த திணிவுள்ள வாயுவின் அமுக்கம், கனவளவு, ஆகியவற்றின் பெருக்கம் அதன் தனி வெப்பநிலைக்கு விகித சமமாகுமெனக் காட்டும் வாயுபற்றிய அடிப்படைத் தொடர்பை [சமன்பாடு (xii)]

$$pv = RT \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

என்னும் வடிவத்திற் பெற்றுள்ளோம்.

ஒரு வாயுவின் விரிவை எடுத்து நோக்கும்போது இரு முக்கியமான வகைகள் கவனிக்கப்பட வேண்டும். விரிவின்போது வெப்பநிலை மாறாதிருப்பின் இவ்விரிவு **சமவெப்புளி** விரிவு எனப்படும். இத்தகைய விரிவு வெப்பம் உறிஞ்சப்படாதபடி மிக மெதுவாய் நிகழவேண்டும். ஆகவே மேலுள்ள அடிப்படைத் தொடர்பு (i) இலிருந்து ஒரு வாயுவின் சம வெப்புளி விரிவுக்கு அமுக்கம் கனவளவு ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பானது வெப்பநிலை மாறிலியாயிருத்தலால்

$$pv = \text{மாறிலி} \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

என்பதாலே தரப்படும்.

ஆனால், விரிவின்போது யாதும் வெப்பம் தப்பவோ வெளியிருந்து உட்செல்லவோ அனுமதிக்கப்படாது வாயு விரியுமாயின் இவ்விரிவு **சேறலில்லா நிலைக்குரிய** தெனப்படும். வாயுவில் வெப்பநிலை மாற்றம் ஏற்படும்; இந்நிபந்தனைகள் திருத்திப்பட வேண்டுமாயின் விரிவு மிகவிரைவாய் நிகழ வேண்டும். சேறலில்லா விரிவில் அமுக்கத்தையும் கனவளவையும் தொடுக்கும் விதியைப் பெறுதல் இந்நூலின் நோக்கிற்கு அப்பாற்பட்டது. மாணுக்கன் வெப்பம் அல்லது வெப்ப வியக்கவியல பற்றிய நுல்களைப் பார்க்கலாம். எனினும் நாம் முடிபைக் கூறி அதைப் பிரயோகிப்போம். அது γ என்பது மாறிலியாக,

$$pv^{\gamma} = \text{மாறிலி} \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$

என்பதாகும். உண்மையில் γ ஆனது, மாறா அமுக்கத்தில் வாயுவின் தன்வெப்பத்தை மாறாக் கனவளவில் அதன் தனவெப்பததாற் பிரித்து வருவதற்குச் சமமாகும். வளிக்கும் மற்றும் வேறு பல வாயுக்களுக்கும் இம்மாறிலியின் எண் பெறுமானம் ஏறக்குறைய 1·4 ஆகும்.

(i), (iii) என்னுஞ் சமன்பாடுகளை ஒன்று சேர்க்க சேறலில்லா மாற்றத்தில் அமுக்கத்திற்கும் வெப்பநிலைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பையும், கனவளவுக்கும் வெப்பநிலைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பையும் நாம் பெறலாம்.

ஆரம்பத்திலுள்ள அமுக்கம், கனவளவு, வெப்பநிலை என்பன முறையே p_0, v_0, T_0, என்பனவற்ருற் குறிக்கப்பட்டு, இறுதி நிலையில் p_1, v_1, T_1 என்பனவற்ருற் குறிக்கப்படுக. சமன்பாடு (i) இலிருந்து

$$p_0v_0=RT_0 \qquad \text{(iv)},$$

$$p_1v_1=RT_1 \qquad \text{(v)}.$$

(iii) இலிருந்து
$$p_0v_0^{\gamma}=p_1v_1^{\gamma} \qquad \text{(vi)}.$$

(vi) இலிருந்து
$$\frac{p_0v_0}{p_1v_1}=\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^{\gamma-1} \qquad \text{(vii)}.$$

ஆகவே (iv), (v) என்பனவற்றிலிருந்து வகுத்தலாற் பெறப்படுவது

$$\frac{T_0}{T_1}=\frac{p_0v_0}{p_1v_1}=\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^{\gamma-1} \quad \text{(vii) இலிருந்து},$$

$$=\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \text{(vi) இலிருந்து},$$

ஒரு வாயு விரியும்போது செயயப்படும வேலையைக் காண்பதற்கு முன்னர் சேறலில்லா விரிவில் ஓர் உதாரணத்தைத தீர்ப்போம்.

உதாரணம் 1. **4°ச. இல் உள்ள வளி சேறலில்லா நிலையில் அதன் கனவளவின் அரைப் பங்குக்கு நெருக்கப்படும். விளையும் வெப்பநிலையைக் காண்க.**

சற்று முன்னர் நிறுவிய தொடர்புகளிலிருந்து :

$$\frac{T_1}{T_0}=\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1}.$$

இங்கு, $T_0=4+273,\ v_1=\frac{1}{2}v_0,\ \gamma=1\cdot 4$;

$$\therefore\ T_1=277\ (2)^{1\cdot 4-1} ;$$

$$\therefore\ \text{மட}\ T_1=\text{மட}\ 277+0\cdot 4\ \text{மட}\ 2$$
$$=2\cdot 5629 ;$$
$$\therefore\ T_1=365\tfrac{1}{2}^{\circ}\ \text{தனி}$$
$$=92\tfrac{1}{2}^{\circ}\text{ச}.$$

94. ஒரு வாயு விரியும்போது செய்யப்படும் வேலை

ஒரு விரியக்கூடிய பாண்டத்தில் v கனவளவுள்ள வாயு கொள்ளப்படுமெனவும், கொள்ளும் பாண்டத்தின் உட்பக்கத்தில் அமுககச் செறிவு p எனவும், வெளிப் பக்கத்திற் பூச்சியமெனவும் உத்தேசிக்க.

δS ஆனது கொள்ளும் பாண்டப்பரப்பின் ஒரு மூலகமாக வாயுவின் சிறு (δv) விரிவில் இம்மூலகம் செவ்வன் வழியே வெளிமுகமாக δn என்னும் நீளம் இயங்குமெனக.

ஆயின் δS இல விசை $= p.\delta S$;

∴ மூலகத்திற் செய்யப்படும் வேலை = விசை × தூரம்

$$= p.\delta S \times \delta n \;;$$

∴ δv கனவளவு விரியும்போது மொத்த வேலை

$$= \Sigma p.\delta S.\delta n$$

$$= p\Sigma \delta S.\delta n \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)},$$

ஏனெனின் சிறு கனவளவு அதிகரிப்பு முழுவதும் p ஒரு மாறிலியாகும. ஆனல் $\Sigma \delta S.\delta n$ எனபது கனவளவில் மொத்த அதிகரிப்பாகும், அதாவது δv ஆகும். ஆகவே (i) தருவது.

δv கனவளவு விரியும்போது வேலை $= p\delta v$;

∴ v_0 கனவளவிலிருந்து v_1 கனவளவுக்கு விரித்தறகு அமுக்கத்தாற் செய்யப்படும் மொத்த வேலை

$$= \int_{v_0}^{v_1} p dv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

p யானது இரு. நிறை/சதுர அங. இலும், v ஆனது கன அங்குலத்திலும் இருக்குமாயின செய்யப்படும் வேலை அங்குல இரு. நிறையிலிருக்கும்.

கீழேயுள்ள இரு வகைகளுக்கும் இக்கோவையைத் தொகையிடுவோம் ;

(i) விரிவு சமவெப்புளி நிலையில் நிகழுமிடத்து,

(ii) விரிவு சேறலில்லா நிலையில் நிகழுமிடத்து.

(i) சமவெப்புளி விரிவின்போது செய்யப்படும் வேலை.

சமவெப்புளி மாற்றத்திறகுரிய சமன்பாடானது

$pv = C$ (ஒரு மாறிலி) ஆகும்.

ஆதலால் சமனபாடு (ii) இலிருந்து, v_0 கனவளவிலிருந்து v_1 கனவளவுக்கு விரியும்போது செய்யப்பட்ட வேலை

$$= \int_{v_0}^{v_1} p dv$$

$$= \int_{v_0}^{v_1} \frac{C}{v} dv$$

$$= C \Big[\text{மட } v \Big]_{v_0}^{v_1}$$

$$= C \text{ மட } \frac{v_1}{v_0}$$

$$= p_0 v_0 \text{ மட } \frac{v_1}{v_0} \;;$$

இங்கு p_0 ஆனது ஆரம்பத்திலுள்ள அமுக்கமாகும். இதே மாதிரி ஒரு வாயுவின கனவளவானது v_0 இலிருந்து v_1 இற்குச் சுருங்கும்போது செய்யப்படும் வேலை

$$= p_0 v_0 \text{ மட } \frac{v_0}{v_1}.$$

(ii) சேறலில்லா விரிவின்போது செய்யப்படும் வேலை.

சேறலில்லா மாற்றத்திற்குரிய சமன்பாடானது

$$pv^{\gamma} = \mathrm{K} \text{ (ஒரு மாறிலி) };$$

$$\therefore \text{ செய்யப்பட்ட வேலை} = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv$$

$$= \int_{v_0}^{v_1} \frac{\mathrm{K}}{v^{\gamma}}\,dv$$

$$= \mathrm{K}\left[\frac{1}{1-\gamma}\, v^{1-\gamma}\right]_{v_0}^{v_1}$$

$$= \frac{\mathrm{K}}{1-\gamma}\left(v_1^{\,1-\gamma} - v_0^{\,1-\gamma}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}\left(p_1 v_1^{\gamma} v_1^{\,1-\gamma} - p_0 v_0^{\gamma} v_0^{\,1-\gamma}\right),$$

$(p_0 v_0^{\gamma} = \mathrm{K} = p_1 v_1^{\gamma})$ ஆதலால்.

$$= \frac{1}{1-\gamma}\left(p_1 v_1 - p_0 v_0\right)$$

$$= \frac{\mathrm{R}}{1-\gamma}\left(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_0\right);$$

ஏனெனின் $p_0 v_0 = \mathrm{RT}_0,\ p_1 v_1 = \mathrm{RT}_1$.

நாம் சில உதாரணங்களை இப்போது தீர்ப்போம்.

உதாரணம் 1. ஆரம்பத்தில் சதுர அங்குலத்திற்கு 100 இருத்தல் அமுக்கத்திலுள்ள ஒரு கன அடி வளி, 10 கன அடிக்கு விரியும். (a) சமவெளிப்புளி விரிவில் (b) சேறலில்லா விரிவில் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.

(a) சமவெப்புளி விரிவு.

சமன்பாடு $pv = \mathrm{C}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \mathrm{C} = 100 \times 144 \text{ இரு./சதுர அடி} \times 1 \text{ கன அடி}$$

$$= 100 \times 144 \text{ அடி} - \text{இரு}.$$

$$\text{செய்யப்படும் வேலை} = \int_1^{10} pdv$$

$$= C \int_1^{10} \frac{dv}{v}$$

$$= C\ \text{மட}_e\ \tfrac{10}{1}$$

$$= 100 \times 144 \times 2{\cdot}30258\ \text{அடி} - \text{இரு. நிறை}$$

$$= 37{,}557{\cdot}4\ \text{அடி} - \text{இரு. நிறை.}$$

(*b*) **சேறலில்லா விரிவு.**

சமன்பாடு $pv^{\gamma} = K$ ஆகும்.

$$\therefore\quad K = 100 \times 144 \times 1^{\gamma}$$

$$= 14{,}400.$$

$$\text{செய்யப்படும் வேலை} = \int_1^{10} pdv$$

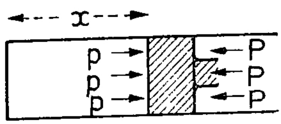
$$= \int_1^{10} \frac{K}{v^{\gamma}} dv$$

$$= \frac{K}{1-\gamma}(10^{1-\gamma} - 1^{1-\gamma})$$

$$= \frac{14{,}400}{-0{\cdot}4}(10^{-0{\cdot}4} - 1)$$

$$= 21{,}600\ \text{அடி} - \text{இரு. நிறை.}$$

உதாரணம் 2. S குறுக்கு வெட்டும் a நீளமும் உள்ள ஒரு இடையான வட்ட உருளை P என்னும் வளிமண்டல அமுக்கமுள்ள வளியால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. இவ்வளி b என்னும் உருளை நீளத்தை மட்டுமே நிரப்பும்வரை ஒரு வளிபோகாத முசலத்தால் மெதுவாய் நெருக்கப்படும். வெப்பநிலை மாறுதிருக்குமென உத்தேசித்து நெருக்கும்போது செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.



படம் 152

உருளைக்குள் வாயு x என்னும் நீளத்திற்கு நெருக்கப்படும்போது வாயுவிலே தாக்கும் விசையை எடுத்து நோக்குக (படம் 152). வாயுவின் அமுக்கம் p ஆகுக. முசலத்தின் வெளிப்பக்கத்தில் வளிமண்டல அமுக்கம் தாக்குதலால் நெருக்கலைத் தடுக்கும் மொத்த அமுக்கம் $p - P$ ஆகும்.

ஆகவே, நெருக்கலைத் தடுக்கும் மொத்த விசை $= (p - P)S$.

ஆயின், ஒரு (அ—து. $-\delta x$) மறை இடப்பெயர்ச்சியில் செய்யப்படும் வேலை

$$= -(p - P)\,S.\delta x\ ;$$

$\therefore$ நெருக்கலின்போது செய்யப்படும் மொத்த வேலை

$$= -\int_a^b (p-\text{P})\,\text{S}.dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)},$$

உருளையின் நீளம் a யிலிருந்து b யிற்குக் குறைதலால்.

ஆனல் அமுக்கம் சமவெப்புளியாதலால் :

$$pv = \text{ஒரு மாறிலி},$$

அதாவது $\quad \text{P.S}a = p.\text{S}x$;

$$\therefore \quad p = \frac{\text{P}a}{x}.$$

ஆயின் (i) தருவது

$$\text{செய்யப்படும் மொத்த வேலை} = -\int_a^b \left(\frac{\text{P}a}{x} - \text{P}\right)\text{S}.dx$$

$$= \text{PS}\int_a^b \left(1 - \frac{a}{x}\right) dx$$

$$= \text{PS}\,(b-a) - \text{PS}a \text{ மட } \frac{b}{a}$$

$$= \text{PS}\,(b-a) + \text{PS}a \text{ மட } \frac{a}{b}.$$

பயிற்சி XIII

1. 1000 கலன் நீரை 24 அடி நிலைக்குத்து உயரத்திற்குப் பம்பித்தற்குச் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க. (1 கலன் நீர் 10 இருத்தல் நிறையாகும்).

2. 10 சதுர அடி குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பளவுள்ள ஓர் உருளை வடிவான கிணற்றின் அடி நிலத்தின் கீழ் 30 அடியிலிருக்கும். கிணற்றில் 10 அடி நீர் உணடெனின் முழு நீரையும் நிலமட்டத்திற்கு கொணடுவரச் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.

3. ஓர் உருளை வடிவமான கொதிநீராவி எஞ்சினின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பளவு 1 சதுர அடியாக அதன் அடிப்பு நீளம் 2 அடியாகும். ஓரடிப்பின்போது சராசரிக் கொதி நீராவி அமுக்கம் சதுர அங்குலத்திற்கு 50 இருத்தலாயின், ஓரடிப்பில் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.

4. F என்னுமொரு விசையின் திசை மாறாது அது தாக்குந் துணிக்கையினது இடப் பெயர்ச்சியோடு பொருந்தும். A, B, C என்பன AB = BC = 5 அடி ஆகுமாறு இடப்பெயர்சசிக் கோட்டில மூன்று புள்ளிகளாகும். P யானது A, B என்பன வற்றிற்கு இடையே கிடககுமிடதது $\text{F} = 20 \times \text{AP}$ இரு. ஆகி, P யானது B, C என்பன வறறிற்கு இடையே கிடக்குமிடத்து $\text{F} = 2500/\text{AP}^2$ இரு. ஆகும். வேலை வரிப்படத்தை வரைந்து, வரைபிலிருந்து மதிபபீட்டால் A யிலிருந்து C யிற்குச் செய்யப்படும் மொத்த வேலையைக் காண்க. உமது முடிபைக் கணிப்பால் சரிபார்க்க. *(Inter. Eng.)*

5. ஒரு திண்மச் சதுரமுகி தன் இரு முகங்கள் கிடையாகுமாறு ஒரு பெரிய நீர்தாங்கியில் மிதக்கும். சதுரமுகியின் தன்னீர்ப்பு 0·75 ஆகிக் கனவளவு 1 கன அடி ஆகும். சதுரமுகியை நீரிலிருந்து முற்றாய்ச் சற்று வெளியே உயர்த்துதற்குச் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.

6. ஓர் உருளை தன் அச்சு நிலைகுத்தாகுமாறு ஒரு பெரிய நீர்த்தாங்கியில் மிதக்கும். x என்னும் கூடுதலான அச்சு நீளம் உள்ளாழ்த்தப்படுமாறு அது கீழே தள்ளப்படுமாயின் உருளையிற் செய்யப்படும் வேலை $\frac{1}{2}wx$ எனக் காட்டுக ; இங்கு w ஆனது கூடுதலாக இடம்பெயாக்கப்பட்ட நீரின் நிறையாகும்.

7. W இரு. நிறையும் a அடி ஆரையும உளள ஒரு கோளம், h அடி ஆழத்திற்கு நீர்கொண்டதும் b அடி ஆரை உளளதுமான ஒருருளை வாளியின் அடியில் ஓய்விலிருக்கும். h ஆனது $2a$ யிலும் பெரிதாகும். கோளத்தை நீரிலிருந்து முற்றுய்ச சற்று வெளியே உயர்த்தற்குச் செய்யவேணடிய வேலை

$$W\left(h-\frac{4a^3}{3b^2}\right)-S\left(h-a-\frac{2a^3}{3b^2}\right)$$ அடி இரு. நிறை என நிறுவுக. இங்கு

S ஆனது கோளத்தால் இடம்பெயாககப்பட்ட நீரின் நிறையாகும்.

8. A குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு உளள ஓர் உருளை வடிவான மரத்துண்டு, நீர்கொண்ட (B என்னுங் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு உள்ள) ஒருருளைக்குள மிதக்கும். மரத்துண்டு முழுவதும் உளளாழ்த்தப்படாதவாறு யாதுமொரு நிலைக்குத் தளளப்படும்போது செய்யப்படும் வேலை,

$$\frac{1}{2}Pl\left(\frac{B}{A}-1\right)$$

எனக காட்டுக. இங்கு l ஆனது நீர்மட்டத்திலுள்ள மாற்றமும், P யானது இறுதி நிலையில் மரத்துண்டுக்குப் பிரயோகிக்கப்படும் விசையுமாகும். இப்பிரச்சினையை

(i) அழுத்தச் சக்தி மாறறஙகளை எடுதது நோககி,

(ii) தொகையிடலால்

தீர்க்க.

யாதுமொரு நிலையில் விளையுள் மேலுதைப்புகுப் பெற்ற கோவையிலிருந்து ஒரு வேலை வரிபபடத்தை வரைந்து செயயபபடும் மொத்த வேலையை ஒரு பரப்பளவாகக் கணிக்க.

9. ஈற்றுக் கேளவியில் மரததுண்டின் நிறை W ஆயும் ஓரலகு கனவளவுள்ள நீரின் நிறை w ஆயும் இருப்பின், மரத்துணடை நீரிலிருந்து முற்றுய்ச் சற்று வெளியே உயர்ததற்குச் செய்யப்படும் வேலை

$$\frac{W^2}{2ABw}(B-A)$$

எனக் காட்டுக.

10. W நிறையும் a ஆரையும் உள்ள கோளமொன்று ஒரு பெரிய நீரப்பாணடத்தில் அரைப்பங்கு உள்ளாழததப்பட்டு மிதககும். அதனை நீரிலிருந்து முற்றுய்ச சற்று வெளியே உயர்த்துதற்கு வேணடிய வேலையைத் தொகையிடலாற் கண்டு, முடிபை §92 உதாரணம் 4 ஓடு ஒப்பிடுக.

11. 87°ச. இல் உள்ள வளி தன்னமுககம் அரைப்பங்காற் குறையும்வரை சேறலில்லா நிலையில் விரியும். விளையும் வெப்பநிலையைக் காண்க.

12. சதுர அங்குலததிற்கு 10 இருத்தல் அமுககத்தில் 100 கன அடி கனவளவுகொண்ட ஒரு வாயு 20 கன அடிக்கு நெருக்கப்படும்.

(i) நெருக்கல் சமவெப்புளி ஆயின்,

(ii) நெருக்கல் சேறலில்லா நிலைக்குரியதாயின்

விளையும் அமுக்கத்தையும் செய்யப்படும் வேலையையும் காண்க.

13. ஒரு வளைதகு பாண்டத்தில் கொள்ளப்படும் வாயு v_0 கனவளவிலிருந்து v_1 கனவளவுக்கு சேறலில்லா நிலையில் விரியும். ஆரம்பத்தில் வாயுவின் அமுக்கம் p_0 ஆயும், விரிவு நிகழும்போது P என்னும் வெளி வளிமண்டல அமுக்கம் உண்டெனின், செய்யப்படும் வேலை

$$\frac{1}{\gamma-1}(p_0v_0-p_1v_1)-P(v_1-v_0)$$

எனக் காட்டுக; இங்கு p_1 ஆனது வாயுவின் இறுதி அமுக்கமாகும்.

14. p_0 அமுக்கமும் v_0 கனவளவும் உள்ள வாயு சேறலில்லா நிலையில் $v_0(1+\alpha)$ கனவளவுககு விரிநது பின்னர் v_0 கனவளவுககுச் சமவெப்புளியாகச் சுருங்கும். வாயுவாற் செயயப்படும் வேலை,

$$p_0v_0\left[\frac{1}{\gamma-1}(1+\alpha)^{1-\gamma}\left\{\frac{1}{\gamma-1}-\text{மட}\,(1+\alpha)\right\}\right]$$

எனக் காட்டுக.

α^3 புறக்கணிக்கப்படுமாயின் இது $\frac{1}{2}p_0v_0\alpha^2(\gamma-1)$ என்பதற்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டுக.

15. a ஆரையுளள ஒரு கோளம் $2a$ என்னும் உள்ளாரையுள்ள ஒரு பொள்ளுருளையின் அடியில உள்ளாழ்ததிப் பிடிக்கப்படும். பொளளுருளை $3a$ ஆழத்திற்கு நீரால் நிரப்பப் பட்டுளளது. பின்னர் கோளம் விடப்பட அது சமநிலைத் தானத்தை அடையும். கோளத்ன்தி தன்னீர்பபு $\frac{1}{2}$ ஆகி நிறை W ஆயின் அழுத்தச் சக்தி நட்டம் $\frac{37Wa}{24}$ எனக் காட்டுக.

விடை

1. 240,000 அடி–இரு. நிறை.

2. 155,750 அடி–இரு. நிறை.

3. 14,400 அடி–இரு. நிறை.

4. 500 அடி–இரு. நிறை.

5. 17·52 அடி–இரு. நிறை.

10. $\frac{5Wa}{8}$.

11. 22·3°ச.

12. (i) சதுர அங்குலத்திற்கு 50 இரு. நிறை., 231,759·4 அடி–இரு. நிறை.;
(ii) சதுர அங்குலத்திற்கு 95·19 இரு. நிறை., 325,368·0 அடி–இரு. நிறை.

பலவினப் பயிற்சி

1. ஓரங்குல விட்டமுள்ள ஒரு பிரமா அழுத்தியின் அமுங்கி 12 : 1 என்னும் வேக விகிதமுள்ள நெம்பால் இயக்கப்படும். மொங்கானின் விட்டம் 10 அங்குலமும் அழுத்தியின் வினைத்திறன் 85 சதவீதமுமாகும். 35 இரு. நிறையுடைய விசை நெம்பின் கைபிடியிற பிரயோகிககப்படுமிடத்து மொங்கானல் உஞற்றப்படும் விசையைக் காண்க. (*Inter. Sc.*)

2. **தன்னீர்ப்பு** என்பதற்கு வரைவிலக்கணங் கூறுக.

   ஒரு கண்ணாடித் துண்டு நீர், கிளிசரீன் (தன்னீரப்பு 1·25) என்பனவற்றில் முற்றாய் உள்ளாழ்த்தப்படும்போது அதன் தோற்ற நிறை முறையே 60 கிராமும் 50 கிராமும் ஆகும். கண்ணாடியின் தனனீர்பைத் துணிக. (*Inter. Sc.*)

3. ஒரு கால்வாய்ப் பூட்டுப் படலை 12 அடி அகலமாகி அதன் இரு பக்கங்களிலுமுளள நீரின் ஆழம் 16 அடியும் 10 அடியும் ஆகும். ஒரு கன அடி நீரின் திணிவு 62·5 இரு. எனக்கொண்டு, படலையில் விளையுள் நீருதைப்பின் பருமனைத் தொன் நிறையிற் காண்க.

4. ஒவ்வொரு பக்கமும் 6 அஙகுல நீளமுள்ள ஒரு சதுரமுகி 5 அடி ஆழமுள்ள ஒரு நீர்தாஙகியின் அடியிற் கிடககும். வளிமண்டல அமுககம் 34 அடி நீராலாய அமுக்கமெனவும் ஒரு கன அடி நீரின நிறை $62\frac{1}{2}$ இரு. எனவுங்கொண்டு சதுரமுகியின் மேற் கிடை முகத்திலும் ஒரு நிலைகுத்து முகத்திலுமுள்ள விளையுள் பாயி அமுக்கத்தை இருத்தல் நிறையிற கணிக்க.

5. ஒரு தேக்கத்தின் நிலைகுத்துச்சுவர் ஒன்றில் இரண்டு வட்டங்கள் வரையப்படும். அவை ஒன்றையொன்று வெளியே தொட (r ஆரையுள்ள) ஒரு வட்டத்தின் மையம் (R ஆரையுள்ள) மற்றை வட்டத்தின் மையத்திற்கு நிலைகுத்தாய்க் கீழே இருககும். மேல் வட்டம் மட்டாய உள்ளாழத்தப்படுமாறு தேக்கததிலுள்ள நீர் உயரும். $x = \mathrm{R}/r$ ஆயின் இரு வட்டங்களிலும விளையுள அமுககங்கள் சமமாகுமிடத்து x ஆனது

$$x^3 - 2x - 1 = 0$$

   என்னுஞ சமன்பாட்டாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக.

   $x = -1$ எனபது இச் சமனபாட்டின ஒரு தீர்வு எனக் காட்டி இதன துணைகொண்டு அதன ஒரே நேர்த் தீர்வு

$$x = \frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{5})$$

   எனக் காட்டுக.

6. ஒரு திரவததில் உளளாழ்த்தப்படும் A எனனும் பரப்பளவு உள்ள தளபபரப்பில் உதைப்பின பருமன் $\rho \mathrm{A} d$ எனக் காட்டுக ; இங்கு ρ எனபது திரவத்தின் அடர்த்தியும் d எனபது சுயாதீனப் பரப்பின் கீழ் தளப்பரப்பின் இடை மைய ஆழமுமாகும்.

   ஒரு மெலலிய மடி உலோகததால ஆக்கப்படும் ஓர் ஒழுங்கான பொட் கூமபகம் $2a$ என்னும் பக்கமுள்ள சதுர வடிவமான அடியையும் $3a$ என்னும் நிலைகுத்து உயரமும் உடையது. இக்கூம்பகம் தனது நிறையின் நாலு மடஙகு நிறையுளள நீரால் முற்றாய் நிரப்பப்படும. கூம்பகத்தின அடி ஒரு கிடைத்தளத்திலிருக்குமாறு முழுவதும் ஓய்விலிருக்குமாயின, கூம்பகத்தின அடியில நீருதைப்பு தளததில் முழுவதாலாய உதைபபின் 2·4 மடங்கு எனக காட்டுக.

   கூம்பகத்தின் ஒரு சாய்முகததில நீருதைப்பின பருமனையுந் திசையையுங் கணடு இம் முடிபுகளை வழங்கி மேலுள்ள தோறறச் சீரிலியை விளக்குக. (*H.S.C.*,I.)

7. நீரிற் பகுதியாய் உளளாழ்த்தப்படும் 0·75 எனனுந் தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு பாரமான சீரான சலாகையின மேன்முனை நீர்ப்பரப்பினமேல் சலாகை நீளத்தின் காறபங்களவு உயரததில நிலையாககபபடும். ஓய்வுநிலை கிடையோடு 30° சாய்வுகொள்ளும் எனக் காட்டுக.

8. வட்ட அடியால அடைககபபட்ட வளைபரப்புடைய ஒரு பொட்கூம்பு மெலலிய மடி உலோகத்தால ஆக்கபபட்டு 12 அஙகுல உயரமும் 5 அஙகுல ஆரையும் உடையது. அதன உச்சி நிலத்திருகக அசசு கிடையாகுமாறு கூம்பு நீரில் முற்றுய்க் கீழாழ்த்தப்பட்டு ஒய்பிலிருகக வேணடும்; ஒரு கன அடி நீா 1000 அவுனசு திணிவுடையதெனக கொணடு சதுர அஙகுலப பரப்புககு வேண்டிய நிறையைக் காண்க.

9. n வளிமணடல அமுககந தாங்கத்தகக ஓர் ஆழ்வோன் நீர்ப்பாரமானி உயரத்தின n மடஙகு ஆழத்திற்கு இறங்க முடியுமென நிறுவுக. ஆழ்உடை ஊதப்படும்போது V கன அடி இடம்பெயரச்செய்யுமாயின அவன் ஈரமில் நிலத்தில நடததல்போல அதே இலகுவாய் கடலின் அடியில் நடத்தற்கு அவனுடைய உடை 1·024 எனனுந தனனீாபபு உள்ள கடல் நீரில 64V இருத்தல ஈயத்தாற் சுமத்தப்பட வேண்டு மெனவும் நிறுவுக.

10. ஒரு செவ்வக நீாத் தாங்கி ஒரு நிலைககுததான மெனறகடால இரண்டு அறைகளாகப பிரிக்கப்படும். இரணடு அறைகளும் h, k என்னும் உயரஙகளுக்கு முறையே ρ, σ எனனும அடாத்திகளகொணட திரவஙகளால் நிரப்பப்படும். மென்றகட்டிலுள்ள அமுக்கஙகளின விளையுள் ஓா இணைக்கு ஒடுங்குமாறு h, k எனபன எவ்வாறு தேரபபடலாமெனக காட்டி நீர்த தாங்கியின ஓா அலகு அகலத்திற்கு அவ்விணையின பருமனைக காணக.

11. a ஆரையுளள உருளைப் பாண்டத்திறகுள உளள σ என்னும் அடர்த்தி கொண்ட திரவத்தில r ஆரையுளள ஓா உருளை மிதககும் மிதககும உருளையில் W எனனுந திணிவு இடப்படுமாயின அது

$$\frac{W}{\pi\sigma}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2}\right)$$

எனனுந தூரம் ஆழுமெனக் காட்டுக.

12. அடியிலலா ஒரு மெல்லிய அரைககோளம், கிடையாகவும் மிகக் கீழாகவும் உள்ள உலோகத் தட்டோடு நெருங்கிய தொடுகையில வைக்கப்படும். அரைக்கோளம் தட்டு ஆகியவறறின பொது ஆரை 1 அங்குலமும தட்டின நிறை 4 அவுன்சுமாயின, தட்டின மையத்திலிருந்து 25 இருத்தல் நிறையைத் தொஙகவிடுதற்கு உளளடைத்த வளி என்ன அளவுககு ஐதாக்கபபடவேண்டுமெனக் காண்க (வளிமண்டல அமுக்கம சதுர அங்குலத்திற்கு 15 இருத்தலெனக் கொள்க).

13. ஆககிமிடீசின் கோடபாட்டைக் கூறி, நிறுவுக.

10 கிகி. நிறையுளள ஓா உலோகத்துண்டு தனது கனவளவின் $\frac{5}{8}$ பஙகு உள்ளாழ்த் தப்பட்டு இரசத்தில் மிதககும். இரசத்தின தன்னீர்பபு 13·5 எனக் கொண்டு உலோகத்தின் கனவளவையும் அடாத்தியையுங காண்க. **(*Inter. Sc.*)**

14. 0·918 தன்னீாப்புளள ஒரு பனிககட்டிச் சதுரமுகி 1·026 தன்னீர்ப்புள்ள கடல் நீரில் இரு முகஙகள் கிடையாகவும் நீர்ப்பரப்புக்கு மேலாக 1 சமீ. இருக்குமாறும் மிதக்கும். அது தூய நீரில் மிதக்குமாறு இடமாற்றப்படுமாயின் யாது உயரம் பரப்பின மேல் இருக்குமெனக் காண்க. **(*Inter. Sc.*)**

15. பக்கம் 2 அடியாகுமாறுள்ள ஓர் அடைத்த சதுர்முகிப் பெட்டியின் அரைப்பங்கு 1·3 தன்னீர்ப்புள்ள எண்ணெயாலும் அரைப்பங்கு நீராலும் நிரப்பப்படும். இடையான ஒரு ஓரத்திற்கூடாகச் செல்லும் முகங்கள் இடையோடு 45° என்னுஞ் சாய்வுகொள்ளும் வரை இவ்வோரம்பற்றிப் பெட்டி சரிக்கப்படும். (i) எணணெயும் நீரும் கலவாவிடின் (ii) எண்ணெயும் நீரும் முற்றுய்க கலக்குமாயின் பெட்டியின் ஒரு நிலைக்குத்தான முகத்தில் திரவவுதைப்பைக் காண்க. நீரினடர்த்தி 62·5 இரு./அடி^{3} எனக் கொள்க. (*Inter. Sc.*)

16. சுயாதீனப பரப்பில ஓர் ஓரமிருககுமாறு நிலைகுத்தாய் உள்ளாழ்ததப்படும் ஒரு முக்கோணி அடரின் திரவ அமுக்க மையத்தின் ஆழம் அடரின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியினது ஆழத்தின் அரைப்பஙகாகுமென நிறுவுக. ABC என்னும் முக்கோணி அடா, AB யானது சுயாதீனப் பரபபிலும் C யானது h ஆழத்திலுமிருககுமாறு நிலைக்குத்தாய் உளளாழததபபடும். D எனபது BC யின் நடுப்புளளியாயின் ADC என்னும் முக்கோணிப் பாகத்தின திரவவமுகக மையத்தின ஆழம $7h/12$ எனக் காட்டி ADC, ADB என்பனவற்றிலுள்ள உதைப்புககளின விகிதத்தையும் காண்க. (*Inter Sc.*)

17. A எனனுங கோணம் செஙகோணமாக, B எனனுங் கோணம் 30° ஆகுமாறு ABC ஆனது ஒரு முக்கோணி அடராகும். நீர்ப்பரப்பில் நிலைத்திருககும் A பறறிய அடர் தன் நிலைகுத்தான தளத்திற் சுயாதீனமாய்த திருமபும். C உளளாழததப்பட்டும் AC இடையோடு 60° கோணததை ஆக்குமாறும அடர் சமநிலையிலிருக்குமாயின அடரை ஆக்குஞ் சடத்தின தனனீாப்பு $\frac{3}{8}$ எனக காட்டுக. (*Inter. Sc.*)

18. ஒரு பாரமானிக் குழாயின் குறுக்குவெடடு 1 சதுர அஙகுலமும், தொரிசெல்லியின் வெற்றிடம் 4 அஙகுல நீளமும, பாரமானியின உயரம் 30 அஙகுலமுமாகும். $\frac{1}{5}$ கன அங்குலமுளள வெளிவளி வெறறிடத்துக்குட செலுததப்பட்டு அதே நேரததில் தனி வெப்பநிலை ஆறிலொரு பகுதியாற் குறைககப்படும். இரசத்தின சுருக்கததைப புறககணிததுக்கொண்டு வெறறிடததிலுள்ள அமுககத்தைக காண்க.

19. ஒரு செம்முககோணிப் பொள அரியம், BC வழியே பிணககபபட்ட ABC எனனும் பாரமான மூடியால் உச்சியில அடைககப்படும. அரியம் நீரால் நிரபபபபட்டு அது ஊற்றுண்டத் தொடங்குமவரை இடையாகவுள்ள BC பறறி முழுவதும் சரிககப்படும். A யானது BC யிற்கு மேலோ கீழோ இருநதாலும ABC எனனுந தளம் இடையோடு ஆக்குங கோணம் ஒரேயளவாகுமெனக காட்டுக. (*H.S.C. III.*)

20. ஒரு செவ்வட்டத் திணமக கூம்பானது (தன்னீாப்பு>1) அதன அடியின பரிதிபபுளளி ஒன்றில் கயிற்றுல் தொடுக்கப்பட்டு அபபுள்ளி நீர்பபரபபிலிருககுமாறு முற்றுய நீரில உள்ளாழ்த்தப்பட்டு ஓய்விலிருககும். உயரம் அடியினது ஆரையின இரு மடங்காயின் வளிபரப்பிலுளள விளையுள் பாயி அமுக்கத்தின் இடைககூறு நிலைகுத்துக் கூறுகள் முறையே 6W/5, 8W/5 என்பனவாகுமெனக காட்டுக. இங்கு W ஆனது கூம்பால இடம்பெயர்க்கப்பட்ட நீரின நிறையாகும்.

21. சுற்றற் பரவளைவுரு வடிவிலுள்ள ஒரு மெலலிய பொட் பாண்டம் தனனச்சு நிலைக்குத் தாகவும் உச்சி கீழ்முகமாகவும் ρ அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில் மிதக்கும். நிறை புறக்கணிக்கப்படுமாயின், உச்சி சுயாதீனத் திரவபபரப்பினகீழ h தூரத்திலிருககுமாறு பாண்டம் $\sigma(>\rho)$ எனனுமஅடர்த்தியுள்ள திரவததால யாது உயரத்திற்கு நிரப்ப வேணடுமெனக் காண்க.

22. ஓா ஓரம் பரப்பிலிருககுமாறு திரவததில உளளாழததப்படுஞ் செவ்வகத்தின் திரவ வமுகக மையத்தைக காணக.

ஒரு முகம் கிடையாகுமாறுள்ள a என்னும் பக்கங்கொண்ட ஒரு பொட் சதுரமுகியின கீழ அரைப் பாகம் நீரால் நிரபபப்பட்டு, மேலரைப் பாகம் 0·9 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தால் நிரப்பபபடும். இரு திரவங்களும் கலவாவிடின சதுரமுகியின ஒரு நிலைக்குத்து முகத்தின திரவவமுக்க மைய ஆழம் $149a/222$ எனக் காட்டுக. (*Inter. Sc.*)

23. $AB = AD$, $CB = CD$ ஆகுமாறுள்ள ABCD என்னும் நாற்பக்கல், A என்னுமுச்சி பரப்பிலும் BD எனனும் மூலைவிட்டங கிடையாகவும இருககுமாறு ஒரு திரவத்தில நிலைக்குத்தாக முற்றுய உள்ளாழ்த்தப்படும். A,C எனபனவற்றிலிருந்து BD யிற்கு வரையபபடுஞ் செஙகுத்துக்கள் முறையே a, b என்னும் நீளங்கள் உடையனவாயின நாற்பக்கலின் அமுக்க மையம் BD யின நடுப்புள்ளியிலிருத்தற்கு

$$2a = (\sqrt{5}+1)b$$

ஆகவேண்டுமென நிறுவுக. (*H.S.C., I.*)

24. ஒரு பக்கம் சுயாதீனப் பரப்பிலிருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில நிலைக்குத்தாய் உள்ளாழ்த தபபடும் முக்கோணியினது அமுக்க மையத்தின ஆழத்தைக காண்க.

C யிற் செங்கோணமுள்ள ABC என்னும் முக்கோணி AB சுயாதீனப் பரப்பிலி ருக்குமாறு நீரில் நிலைக்குததாய் உள்ளாழ்ததப்படும். பினனா அது AC நிலைக்குத தாகுமவரை A பற்றிச சுழறறப்படும். இரு நிலைகளிலும் ABC என்னும் முக்கோணி யின் அமுக்கமைய ஆழஙகள் 2சைன்$\alpha : 3$ எனனும் விகிதத்திலிருக்குமெனக் காட் டுக. இஙகு α வானது BAC எனனுங் கோணமாகும். (*Inter. Sc.*)

25. அமுக்கம் பூச்சியமாயுள்ள சுயாதீனப் பரப்பில் BC எனனும பக்கமிருக்குமாறு திரவத்தில நிலைகுத்தாய உளளாழ்த்தப்படும் ABC என்னும் முக்கோணிப் பரப்பின அமுக்கமைய ஆழத்தைக காண்க ; BC யின் கீழ் A யின ஆழம் d எனத் தரப்படும.

BCX, ABX என்னும் முக்கோணிகளில திரவ உதைப்புக்கள சமமாகுமாறு X என்பது AC எனனும் பககத்திலுள்ள புள்ளியாயின் ABX என்னும் முக்கோணியின அமுககமைய ஆழம்.

$$d(1-\tfrac{1}{4}\sqrt{2})$$

எனக் காட்டுக. (*H.S.C., I.*)

26. மெலலிய மடி உலோகத்தாலான ஓர் அடைத்த பாண்டம், a ஆரையும் a உயரமும் உள்ள செவவட்ட உருளை ஒரு முனையில அடைக்கப்படடு மற்றை முனையின் விளிம்பு a ஆரையும் a உயரமும உள்ள வட்டக கூம்பின் அடியினது விளிம்போடு ஒட்டுதலாற் பெறப்படும். அதன அச்சு நிலைக்குத்தாகுமாறும் கூமபு வடிவான பாகம் மிகமேலாகு மாறு அது பிடிக்கப்படடுக கூம்பு உச்சியிலுளள ஒரு துளைககூடாக நீரால் நிரபபப்படும். பின்னர் துளை அடைககப்பட்டுப் பாண்டம் தலைகீழாக்கப்படுமாயின் இரு நிலைகளிலும் கூம்பின் வளைபரப்பிலுள்ள திரவ உதைப்புக்களின் விகிதத்தைக் காண்க. (*Inter. Sc.*)

விடை

1. 35,700 இரு. நிறை.

2. 2·5.

3. 26·1.

4. 601·6 இரு. நிறை, 605·5 இரு. நிறை.

6. $2a^3w\sqrt{10}$; நிலைக்குத்தோடு தான் $^{-1}$ 3.

8. 0·635 அவு./சதுர அங.

10. $\rho h^2 = \sigma k^2$ ஆயின அமுக்கம் ஓர் இணைக்குச் சுருங்கும். இணையின் பருமன $\sigma k^2 (h \sim k)/6$ ஆகும.

12. 46·4%.

13. $1\frac{1}{3}$ இலீற்றர் ; 7·5 கி./சமீ.^{3}

14. 7·79 மிமீ.

15. (i) 371·2 இரு. நிறை ;
(ii) 406·8 இரு. நிறை.

16. 3 : 1.

18. 1 அங்குல இரசத்தாலாயது.

21. $h\sqrt{(\rho/\sigma)}$.

26. 1 : 2.

அட்டவணை

எண்கள் பக்கங்களைக் குறிக்கும்